Feuille 10. Dérivabilité

Exercice 10-1 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

1) x^4+3x^2-6	2) $6x^{7/2}+4x^{5/2}-2x$	3) $\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$	4) $x(x+3)e^x$
5) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$	6) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$	7) $\dfrac{\ln x}{x^3}$	8) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
9) $\sqrt[3]{x^2+x+1}$	10) $\sin(\cos(3x))$	11) $\ln(\sin^2 x)$	12) e^{-x^2}
13) $(1-x)^{7/3}$	14) $\ln(\lvert 2x\rvert)$	15) $\ln(\lvert e^{2\imath\pi x}\rvert)$	16) $2^{\ln x}$

Exercice 10-2 Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{si } 0\le x\le 1,\\ ax^2+bx+1, & \text{si } x>1,\end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 10-3

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}e^x-x, & \text{si } x<0,\\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0\le x\le 1,\\ 1+\dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x>1.\end{cases}$$

2. Même question avec f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$.

Exercice 10-4 Préciser pour chacune des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1. $f:\ x\longmapsto \cos(\cos(x))$.
2. $g:\ x\longmapsto \sqrt{1+\cos(x)}$.
3. $h:\ x\longmapsto \sqrt{|\sin x|}$.

Exercice 10-5 Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x+\exp(-1/x^2), & \text{si } x>0,\\ \sin x, & \text{si } x\le 0.\end{cases}\end{array}$$

1. Pourquoi f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$? Calculer sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 10-6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de n, f_n est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de n, est-elle f_n dérivable ?
3. Pour quelles valeurs de n, est-elle f_n' continue ?
4. Pour quelles valeurs de n, est-elle f_n' dérivable ?

Exercice 10-7 Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x| \leq |x|$ pour $x \geq 0$;
2. $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.

Remarque : Ces résultats peuvent aussi se démontrer par des arguments de concavité.

Exercice 10-8

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$
2. En déduire que :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 10-9

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Exercice 10-10 Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule sur l'intervalle $]0,1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat. Généralisez à une fonction k fois dérivable ayant n zéros, pour tous entiers $k < n$.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Exercice 10-11 On considère $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire qu'il existe des nombres réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n.$$

Montrer qu'il existe au plus n solutions réelles à l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 10-12 Montrer que $100 + \dfrac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\dfrac{1}{4 \cdot 10^6}$.

Exercice 10-13 Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n$ où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

Exercice 10-14

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$
2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\dfrac{\alpha-1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Exercice 10-15 Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$
Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$
a au moins une solution x dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 10-16 On condidère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit deux fois dérivable et g continue.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$ un maximum local de f. Montrer que $f''(c) \leq 0$.
2. De même, si $c \in \mathbb{R}$ est un minimum local de f, montrer que $f''(c) \geq 0$.
3. On suppose que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + g(x)f'(x) - f(x) = 0.$$
On suppose de plus qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 10-101 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10-102 Montrer que la fonction P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ a au plus 4 racines réelles.

Exercice 10-103 On définit
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(1+x^2) - \arctan x \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est un polynôme de degré n qui satisfait les identités
   (a) $P_1(x) = 2x - 1$,
   (b) $P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - 2xP_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n a n racines distinctes.

Exercice 10-104 Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Montrer que f est dérivable à droite en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$, en supposant que cette limite est finie.

Exercice 10-105 Soient $a < b$ deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a, b[$ vers $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Exercice 10-106 Soit f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} .$$
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$.]
2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0, 1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2\,x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2\,(1 - x)^2$.]

Exercice 10-107 Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$