Feuille 2 : Sur les applications

Exercice 2-1

1. On note $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. On note $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ et $B \cup C$.

Réponse :

1. $A \cap B = \{1, 2, 3\} = A$ et $A \cup B = B$. En effet, $A \subset B$.
2. $A \cap B = [2, 3]$ et $A \cup B = [1, 4]$.
3. $A \cap B =]-2, 3]$, $A \cup B =]-\infty, 7]$, $B \cap C =]-2, 7] = B$, $B \cup C = C$.

Exercice 2-2

Soit A et B deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Réponse : Comme il s'agit de montrer une équivalence, il y a deux directions à montrer. D'abord on admet que $A \subset B$, et on essaye d'en déduire que $A \cup B = B$. Cette dernière est une égalité d'ensembles à montrer. Il faut et il suffit donc de montrer que chaque ensemble est contenu dans l'autre. Cette tâche, parfois dure, est relativement simple dans cet exercice. D'abord, comme une réunion contient tous les ensembles qui la forment, $B \subset A \cup B$. Cette inclusion est donc indépendante de l'hypothèse $A \subset B$. Pour montrer l'inclusion $A \cup B \subset B$, on fixe un élément arbitraire de $A \cup B$, disons x, on essaye de raisonner que $x \in B$ aussi. Or, soit $x \in B$, dans lequel cas il n'y a rien à faire, soit $x \in A$, mais $A \subset B$, donc $x \in B$ encore une fois. Par conséquent, $x \in B$ et $A \cup B \subset= B$. Les deux inclusions permettent de conclure que $A \cup B = B$.

Maintenant, on admet que $A \cup B = B$, et on essaye d'en déduire que $A \subset B$. Or, comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe précédent, une réunion d'ensembles contient chaque ensemble contribuant à cette réunion. Dans notre cas, B contient A.

Exercice 2-3

Soit A, B et C trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C)\ ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Réponse ?

1. L'implication est en effet vraie. On peut la vérifier en vérifiant sa contraposée. Celle-ci est l'énoncé suivant :

$$(A \subseteq C) \text{ et } (B \subseteq C) \implies (A \cup B) \subseteq C \quad .$$

Une fois qu'on a trouvé la contraposée correctement, le reste est clair puisque, comme on l'a déjà remarqué dans l'exercice précédent, la réunion de plusieurs ensemble contient tous les ensembles qui la forment.

2. Pour le deuxième énoncé, on montre que tout élément de B est contenu dans C. Soit $x \in B$ un tel élément. Alors, soit $x \in A \cap B$, soit $x \in B \setminus A$. Dans le premier cas, la deuxième hypothèse implique que $x \in A \cap C$, donc en particulier $x \in C$. Dans le deuxième cas, on se sert de la première inclusion pour déduire que $x \in (A \cup C) \setminus A$. Par conséquent, $x \in C$. On conclut que $B \subset C$.

Exercice 2-4

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$.

2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 > 0$.

Réponse :

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \neq |x|$ et $x \neq -|x|)$. L'énoncé est vrai.
2. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq -|x|)$. La négation est vraie.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 \geq 0$. La négation est vraie.
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 \leq 0$. L'énoncé est vrai.

Exercice 2-5

En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Réponse : Écrivons d'abord la conraposée : $a > b \implies (\exists \varepsilon > 0,\ a > b + \varepsilon)$. Maintenant on suppose $a > b$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Comme $a > b$, $\varepsilon > 0$. Ensuite on fait le calcul $b + \varepsilon = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2a}{2} = a$.

Exercice 2-6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. f s'annule ;
2. f est l'application nulle ;
3. f n'est pas une application constante ;
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. f s'annule au plus une fois.

Réponse :

1. f s'annule ; $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.
2. f est l'application nulle ; $\forall x \in I,\ f(x) = 0$.
3. f n'est pas une application constante ; $\exists x \in I \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ; $\forall x \in I \forall y \in I,\ (x \neq y) \implies (f(x) \neq f(y))$.
5. f s'annule au plus une fois. $(\forall x \in I,\ f(x) \neq 0)$ ou $(\exists x \in I,\ (f(x) = 0)$ et $\forall y \in I,\ (f(y) = 0 \implies y = x))$.

Exercice 2-7

1. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?
2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

   (a) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; (b) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$; (c) $h(x) = \sqrt{3x - 1}$.

Réponse :

1. Les deux applications à calculer ont $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ et $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée. Pour x réel, on calcule $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2$ et $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x$. On compare ensuite, par exemple, leurs valeurs en 0 ; après avoir constaté que $g \circ f$ s'annule en ce point mais pas $f \circ g$, on observe que $f \circ g \neq g \circ f$. On ne s'extasiera pas devant une telle observation, bien banale.

2. On peut faire les choix suivants.
   (a) $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \sin x$ et $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) $u: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v: \mathbb{R} \setminus \{-7\} \to \mathbb{R}^*$ définie par $v(x) = x + 7$.
   (c) $u: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v: [\dfrac{1}{3}, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $v(x) = 3x - 1$.

Exercice 2-8

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse : Après quelques tâtonnements sur des petites valeurs de n, on émet l'hypothèse de récurrence suivante, qu'on note (H_n) :

$$(H_n) \qquad \text{« Pour tout } x \text{ réel }, f^n(x) = 2^n x + 2^n - 1. \text{ »}$$

* Vérification de (H_1) : soit x un réel. On considère $2^1 x + 2^1 - 1 = 2x + 2 - 1 = 2x + 1 = f(x)$. * Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons (H_n). Soit x un réel. On calcule :

$$f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] = 2\left(2^n x + 2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1} - 1,$$

ce qui prouve (H_{n+1}).

* Par le principe de récurrence, ceci démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'énoncé (H_n) est vrai.

Exercice 2-9

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto x^2 \end{array}$
2. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \quad x & \mapsto x^2 \end{array}$
3. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad n & \mapsto n \end{array}$
4. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto 2x \end{array}$
5. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto 8x + 3 \end{array}$
6. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \{14\} \\ \quad x & \mapsto 14 \end{array}$
7. $\begin{array}{lll} f: \{17\} & \longrightarrow \{12; 17\} \\ \quad x & \mapsto 17 \end{array}$
8. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$
9. $\begin{array}{lll} f: \{0\} & \longrightarrow \{0\} \\ \quad x & \mapsto 0 \end{array}$
10. $\begin{array}{lll} f: \{1\} & \longrightarrow \{1/2\} \\ \quad x & \mapsto \dfrac{1}{x+1} \end{array}$
11. $\begin{array}{lll} f: \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad n & \mapsto n + 1 \end{array}$
12. $\begin{array}{lll} g: \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \quad n & \mapsto n + 1 \end{array}$
13. $\begin{array}{lll} k: \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}. \end{array}$

Réponse :

1. Elle n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$ bien que 1 et -1 soient distincts, et n'est donc pas bijective. Elle n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent, les carrés de réels étant notoirement positifs ou nuls.
2. Elle n'est pas davantage injective ni bijective que la précédente, pour la même raison. En revanche elle est surjective : soit y un réel positif ou nul, on constate que $f(\sqrt{y}) = y$ et donc que y possède au moins un antécédent.
3. On reconnaît l'application identique, notoirement bijective donc injective et surjective.
4. Elle n'est pas surjective car -2 n'a pas d'antécédent, le double d'un réel positif ou nul est en effet toujours positif ou nul ; elle n'est donc pas bijective. Elle est en revanche injective : soit x et x' sont deux réels tels que $2x = 2x'$, il suffit de diviser par 2 pour conclure que $x = x'$.
5. Soit y un réel. Pour x réel, $f(x) = y \iff 8x + 3 = y \iff 8x = y - 3 \iff x = \dfrac{y-3}{8}$. On a trouvé un et un seul antécédent à y : ceci prouve que f est bijective, donc injective et surjective.
6. Elle n'est pas injective donc pas bijective pour la même raison qu'au 1). Elle n'est pas surjective parce que 12 n'a pas d'antécédent par f.
7. Elle n'est pas surjective pour la même raison que la précédente, donc pas bijective. Elle est injective comme toute application définie sur un singleton : soit x et x' dans l'ensemble de départ, on obtient $x = x'$ sans même penser à f !

8. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent, lui qui n'est l'inverse de personne, et n'est donc pas bijective. Elle est injective : soit x et x' deux réels strictement positifs ; supposons que $1/x = 1/x'$, par inversion $x = x'$.
9. Même chose qu'au 3.
10. Elle est bijective (donc injective, donc surjective) comme toute application d'un singleton vers un singleton.
11. Elle n'est pas surjective : en effet 0 n'a pas d'antécédent, le successeur d'un entier naturel étant toujours strictement positif, et elle n'est par conséquent pas bijective. Elle est injective : soit n et n' deux entiers naturels ; supposons $n + 1 = n' + 1$. En soustrayant 1 on obtient $n = n'$.
12. Soit r un entier relatif. Pour tout entier relatif n, $f(n) = r \iff n + 1 = r \iff n = r - 1$. On a trouvé un et un seul antécédent pour r, ce qui prouve que f est bijective et donc injective et surjective.
13. L'application proposée n'est pas surjective ; en effet 1 n'a pas d'antécédent : pour tout x dans l'ensemble de départ, les réels $x + 1$ et $x - 1$ sont distincts, donc leur quotient n'est pas égal à 1. L'application f n'est par conséquent pas bijective. En revanche, f est injective. Une façon agréable de le montrer est de remarquer que pour tout x de l'ensemble de définition,
$$f(x) = \frac{x - 1 + 2}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$
Ceci étant noté, si x et x' sont deux éléments de l'ensemble de définition tels que $f(x) = f(x')$, on constate que $1 + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x'-1}$ donc $\frac{2}{x-1} = \frac{2}{x'-1}$ donc $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1}$ donc $x - 1 = x' - 1$ donc $x = x'$.

Exercice 2-10

1. On définit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par $f(m, n) = mn$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?
2. On définit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g(k) = (k, (k + 1)^2)$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

Réponse :

1. L'application f n'est pas injective. Il suffit de constater que $f(m, 0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Elle est pourtant surjective puisque $f(m, 1) = m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Elle n'est donc pas bijective.
2. L'application g est injective. En effet, si $f(k) = f(l)$ pour $k, l \in \mathbb{N}$, alors $(k, (k + 1)^2) = (l, (l + 1)^2)$, et par conséquent, $k = l$. Elle n'est pas injective : par exemple $(0, 0)$ n'a pas d'antécédent.

Exercice 2-11

Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = x^2$.

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Réponse :

1. $I = \{1\}$, $J = \{1, 2\}$.
2. $I = \mathbb{R}$, $J = \{\pi\}$.
3. $I = \{-1, 1\}$, $J = \{1, 2\}$.
4. $I = \{1\}$, $J = \{1\}$.

Bien évidemment, ce ne sont pas les seuls choix possibles pour I et J.

Exercice 2-12

1. Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que :
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. On définit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \to \mathbb{Q}$ par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Réponse : 1. Par hypothèse, $q_1, q_2 \geq 2$. Ceci équivaut à $0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2}$. En multipliant la deuxième suite d'inégalités par -1, on obtient $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0$. On somme alors cette dernière suite avec $0 < \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{2}$, les inégalités strictes impliquent $-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$.

2. Commençons par l'injectivité. Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$. Alors $p_1 - p_2 = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}$. On a montré dans le premier point que $-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} < \frac{1}{2}$. Or $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ et entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ il n'y a qu'un seul entier, c'est 0. Alors $p_1 = p_2$, et il en découle que $q_1 = q_2$.

L'application est-elle surjective ? La réponse est négative. En effet, 0 n'a pas d'antécédent. Pour le justifier il suffit d'essayer de résoudre l'équation $p + \frac{1}{q} = 0$. Les détails sont laissés aux usagers. Finalement, tout ce qui précède montre que f n'est pas bijective.

Exercice 2-13

On définit une partie du plan par $D = \{(x, y) \in, \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ puis une application $f : D \to \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

1. Représenter graphiquement D.
2. (a) Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

   (b) En déduire que f est injective.
3. Est-ce que f est surjective ?

Réponse : 2. (a) Admettons l'hypothèse sur (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans D. Si on fait la somme membre par membre des deux égalités du système

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors on obtient $2x_1 = 2x_2$. Par conséquent $x_1 = x_2$, il en découle que $y_1 = y_2$.

(b) Maintenant, soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2), deux paires dans D telles que $f((x_1, y_1)) = f((x_2, y_2))$. Alors

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1 y_1 = 2x_2 y_2 \end{cases}$$

La somme et la différence membre par membre donnent

$$\begin{cases} (x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2 \\ (x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} |x_1 + y_1| = |x_2 + y_2| \\ |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| \end{cases}$$

Résolvons les deux équations. La définition de D nous montre que $x_i + y_i \geq 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$ tandis que $y_i - x_i \geq 0$. Alors, en utilisant les propriétés de bases des valeurs absolues, on a

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

et on en déduit comme dans 2. (a) que $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On a vérifé que f est injective.

3. L'application f n'est pas surjective parce que D contient des points avec première coordonnée strictement négative tandis que toute image directe sous f a comme première coordonne un nombre réel égal à au moins 0.

Exercice 2-14

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

   (a) $g \circ f = Id_E$; (b) $f \circ g = Id_F$; (c) $f \circ f = Id_E$.

Réponse : 1. Soient $a, b \in E$ tels que $g(f(a)) = g(f(b))$. Comme g est injective, on déduit que $f(a) = f(b)$. Ensuite, l'injectivité de f implique $a = b$.

2. Soit $c \in G$. Nous voulons montrer que c a un antécédent sous $g \circ f$. Comme f est surjective, il existe $b \in F$ tel que $g(b) = c$. Comme g est surjective, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = b$. Alors, $g(f(a)) = g(b) = c$.

3. Si f et g sont bijectives, alors les deux premiers points de l'exercice montrent que $g \circ f$ est aussi bijective parce que bijective = injective + surjective.

4. On admet que $g \circ f$ est est injective. On montrera qu'il en est de même pour f. Alors, soient $a, b \in E$ tels que $f(a) = f(b)$. Alors, $g(f(a)) = g(f(b))$. Or, par hypothèse $g \circ f$ est injective. Ainsi, $a = b$.

5. On admet que $g \circ f$ est surjective. Soit $c \in G$. On veut montrer que b a un antécédent dans F. Comme $g \circ F$ est surjective, c a un antécédent $a \in E$ tel que $g(f(a)) = c$. Alors $f(a)$ est un antécédent de c sous l'action de g.

6. (a) f est injective et g est surjective.

(b) f surjective et g est injective.

(c) f est bijective.

Exercice 2-15 On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.

1. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Réponse : 1. Non, parce que sinon f serait surjective, ce qui n'est pas le cas.

2. Oui, on peut définir $h(n) = \sqrt{n}$ si n est un carré et $h(n) = n$ sinon.

Exercice 2-16

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$

   (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.

   (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Réponse : 1. (a) Si $A = \{1\}$, alors $f(A) = \{4\}$. Si $A = \{1, 3\}$, $f(A) = \{4, 2\}$. Si $A = \{3, 4\}$, alors $f(A) = \{2\}$. Si $A = \emptyset$, alors $f(A) = \emptyset$.

(b) Si $B = \{2\}$, alors $f^{-1}(B) = \{3, 4\}$. Si $B = \{1, 2\}$, alors $f^{-1}(B) = \{2, 3, 4\}$. Si $B = \{3\}$, alors $f^{-1}(B) = \emptyset$.

2. Si $B = \{1\}$, alors $f^{-1}(B) = \{-1, 1\}$. Si $B = [1, 2]$, alors $f^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

Exercice 2-17

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0,1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0,1])$;
12. $\cos^{-1}([0,1])$;

Réponse :

1. $\tan(\{0\}) = \{0\}$;
2. $\sin^{-1}(\{2\}) = \emptyset$;
3. $\exp(]-\infty, 2]) =]0, e^2]$;
4. $\exp^{-1}([-1, e]) =]-\infty, 1]$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[) = [e^3, +\infty[$.
7. $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1]) = [-1/2, 1]$ pour $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0,1]) = [0,1]$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0,1]) = [0, \frac{\pi}{2}$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0,1]) = [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \cup [\frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}]$;
12. $\cos^{-1}([0,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$;

Exercice 2-18

Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-meme telle que $f\Big(f(E)\Big) = E$. Montrer que f est surjective.

Réponse : Il nous faut montrer que tout $x \in E$, a un antécédent. Or par hypothèse, $f(f(E)) = E$. Cet égalité d'ensembles montre que pour un tel $x \in E$, il existe $y \in E$, tel que $f(f(y)) = x$. Alors $f(y)$ est un antécédent de x.

Exercice 2-19

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective ;

ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Réponse : Comme il s'agit de montrer l'équivalence de deux conditions, il y a deux directions à vérifier.

Admettons d'abord que f est injective (la condition (i)). Soient maintenant A_1 et A_2 deux sous-ensembles de X. On veut vérifier que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. C'est une égalité d'ensembles. Par conséquent, il y a deux directions à montrer. L'inclusion $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ est toujours vraie : si $x \in A_1 \cap A_2$, alors $f(x) \in f(A_1)$ et $f(x) \in f(A_2)$. Ceci montre que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ Montrons maintenant que $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$. Soit maintenant $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Ceci veut dire qu'il existe $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Or, f est supposée injective, et donc forcément, $x_1 = x_2$. Ainsi $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. Cette dernère conclusion montre que $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Nous avons donc montré l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ aussi. Par conséquent, $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$.

Maintenant, admettons que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ pour toute paire de sous-ensembles de X. Nous montrerons que f est injective. Soient alors $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On définit $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$. Par hypothèse, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Or, $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$. Si maintenant $x_1 \neq x_2$, alors $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $f(\emptyset) = \emptyset \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. On conclut que $x_1 = x_2$.

Exercice 2-20 Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g :]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x)))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a(s,t) = (2s, 3t)$.

4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b(s,t) = (s+t, s-t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t,n) = t \cdot 10^n$.

Réponse : Nous nous contentons de donner les définitions des fonctions réciproques. C'est un bon exercice de fournir les raisonnements divers menant à ces conclusions.

1. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.
2. $g^{-1} : \mathbb{R} \to]e, +\infty[$ définie par $g^{-1}(x) = \exp(\exp(\exp x)))$.
3. $a^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a^{-1}(s,t) = (\dfrac{s}{2}, \dfrac{t}{3})$.
4. $b^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b^{-1}(s,t) = (\dfrac{s+t}{2}, \dfrac{s-t}{2})$.
5. $F^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \to [1, 10[\times \mathbb{Z}$ définie par $F^{-1}(x) = (\dfrac{x}{10^n}, n)$ si $x \in [10^n, 10^{n+1}[$.

Exercice 2-21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Réponse : Admettons que f soit comme définie dans l'énoncé. Supposons maintenant, $x < y$. Comme f est une bijection, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. Nous parlons bien sûr des uniques antécédents de x et de y. Alors $f(u) < f(v)$. Si maintenant $v < u$, alors $f(u) < f(v)$ car par hypothèse, f est strictement croissante, c'est absurde. Comme $u \neq v$ non plus, on conclut que $u < v$.

Exercice 2-22

Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.

Réponse : Nous pouvons écrire les égalités suivantes : $f = \mathrm{Id} \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$. Comme par hypothèse g est un bijection, g^{-1} en est une aussi. On a donc écrit f comme la composée de deux bijections. Alors, f est une bijection d'après le point 3 de l'exercice 2.14.

Exercice 2-101

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.

1. Soit m un entier positif. Déterminer tous les antécédents de m.
2. Soit m un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de m.
3. L'application f est-elle une bijection ?

Exercice 2-102

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une application strictement croissante.

1. Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.

Exercice 2-103

Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;
ii) f est injective.

Exercice 2-104

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? (On discutera selon la valeur de y).
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
4. (a) Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f. Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.
   (b) En déduire que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 2-105

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soient également A_1 et A_2 deux parties de E, et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 2-106

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.

Exercice 2-107

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est une bijection.