

### Feuille 4 : Fonctions usuelles

#### I Divers

##### Exercice 4.1.

1. Montrer que  $1 + \sin(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ .
2. Exprimer  $\cos(4x)$  et  $\sin(4x)$  en fonction de  $\cos(x)$  et de  $\sin(x)$ .
3. Exprimer en fonction de  $x \mapsto \tan(x)$  uniquement les fonctions

$$f_1: x \mapsto f_1(x) = \cos^2(x); f_2: x \mapsto f_2(x) = \frac{\sin^4(x) + \cos^4(x)}{\sin^4(x) - \cos^4(x)};$$
$$f_3: x \mapsto f_3(x) = \frac{\sin^3(x) - \cos^3(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \text{ et } f_4: x \mapsto f_4(x) = \cos^2(x) - \sin(x) \cos(x)$$

##### Exercice 4.2.

1. Calculer

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule  $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ , déterminer les solutions de l'équation :  
$$2 \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x)$$

##### Exercice 4.3.

$u$  et  $v$  étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\operatorname{ch}^2(u) + \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) + \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v)$$
$$\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}^2(v) = \operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{sh}^2(v) = \operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v)$$

##### Exercice 4.4.

Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$$

##### Exercice 4.5.

Calculer, lorsque c'est possible, la dérivée des fonctions  $f_i$  définies de la manière suivante :

$$f_1(x) = \ln|\cos(x)|; f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); f_3(x) = \cos^2(3x);$$
$$f_4(x) = e^{2x+1}, f_5(x) = \tan(x^2), f_6(x) = \sqrt{1-x^2}$$

##### Exercice 4.6.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$3 \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) - 3 = 0$$

##### Exercice 4.7.

Discuter en fonction de la valeur du réel  $x$  de l'existence et la valeur éventuelle de la limite de  $x^n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

##### Exercice 4.8.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x) - \operatorname{sh}^3(x))$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch}(x)))$$

### Exercice 4.9.

Soit  $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $\text{sh}$  est une bijection continue et soit  $\text{sh}^{-1}$  sa bijection réciproque.
2. Calculer  $(\text{sh}^{-1})'$  à l'aide de la formule du cours.
3. Déterminer explicitement  $\text{sh}^{-1}(x)$  et retrouver le résultat du 2.

## Concavité, convexité, points d'inflexion

### Exercice 4.10.

Soient  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

1. Déterminer l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
3. Montrer que  $f$  admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de  $x$ .

### Exercice 4.11.

Soient  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
2. Montrer que  $f$  admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de  $x$ .

## Etudes de fonctions complètes

Exercice 4.12. On définit la fonction  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  au bord de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  de l'expression

$$f(x) - (x + 2)$$

En déduire que la droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote au graphe de  $f$ .

4. Déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote d'équation  $y = x + 2$ .
5. Tracer le graphe de  $f$ .

### Exercice 4.13.

On note  $f$  la fonction définie sur  $]0,1[$  par  $f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x$  et  $g$  la fonction définie sur

$$]0,1[ \text{ par } g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

1. Etudier les variations de  $f$  sur  $]0,1[$  et en déduire que  $f$  est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de  $g$  sur  $]0,1[$ .
3. Déterminer les limites éventuelles de  $g(x)$  pour  $x$  tendant vers 0 et pour  $x$  tendant vers 1.

Exercice 4.14. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$ .

1. Déterminer les limites éventuelles de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$ .
3. Tracer sommairement la courbe représentative de  $f$ .

Exercice 4.15. Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(u) = \frac{4 - 5 \text{ch}(u)}{\text{sh}(u)}$$

1. Montrer que  $f$  est bien définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Est-elle paire, impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de  $f$  en  $+\infty$  et en  $0^+$ .
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ . On veillera à donner une expression très simple des points où  $f'$  s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer son graphe.

Exercice 4.16. Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , sa période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude.
2. Calculer la dérivée de  $f$  et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de  $f$ .

Exercice 4.17. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$ .

1. Soit  $g$  la fonction numérique définie par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$ . Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel  $x_0$  tel que  $g(x_0) = 0$ , déterminer  $x_0$ .
2. En déduire les variations de  $f$ .
3. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de  $f$ .
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Exercice 4.101. Etablir la formule suivante :

$$\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y) \tan(y - z) \tan(z - x)$$

Où  $x, y, z$  sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule donnant  $\tan(a + b)$  en fonction de  $\tan(a)$  et  $\tan(b)$ .

Exercice 4.102.

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8 \operatorname{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de  $f$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Tracer le graphe de  $f$ .

Exercice 4.103.

Soit  $f$  la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand  $u$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Etudier les variations de  $f$ . On veillera à fournir une expression très simple de la valeur  $u_0$  pour laquelle  $f'(u_0) = 0$ .

4. Tracer le graphe de  $f$ .

Exercice 4.104. Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2} \cos(x)$$

1. Etudier la parité de  $f$  et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique  $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  et tracer le graphe de  $f$ .