

## Feuille 5 : Nombres complexes

**Exercice 5-1.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= 4 + 5i, & \text{b) } z &= (-2 + 2i) + (5 + 3i), & \text{c) } z &= (-3 - 7i)(1 - 2i), \\ \text{d) } z &= (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i), & \text{e) } z &= \frac{4 - 3i}{5 + 2i}, & \text{f) } z &= \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}, \\ \text{g) } z &= \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i. \end{aligned}$$

**Exercice 5-2.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$  pour  $m \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5-3.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de  $Re(z)$  et  $Im(z)$  :

$$\begin{aligned} \text{a) } z + 1, & & \text{b) } z^2 + 3i, & & \text{c) } \bar{z} + 2z, & & \text{d) } \bar{z} + z - i, \\ \text{e) } z^3 + 1, & & \text{f) } iz^2 - 3\bar{z}, & & \text{g) } z - \bar{z} + iz, & & \text{h) } z^2 - i\bar{z} + 4. \end{aligned}$$

**Exercice 5-4.**

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z = 2 + 5i, \quad \text{b) } z = -3 + 2i, \quad \text{c) } z = (3 - 2i)(9 + i), \quad \text{d) } z = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}.$$

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de  $z$  :

$$\text{a) } z\bar{z}, \quad \text{b) } 2z^2, \quad \text{c) } \frac{2}{\bar{z}}, \quad \text{d) } 3\frac{\bar{z}^2}{z}.$$

**Exercice 5-5.** Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ . Établir la relation  $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$  et en donner une interprétation géométrique.

**Exercice 5-6.**

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{a) } z = 1 - i, \quad \text{b) } \bar{z}, \quad \text{c) } z + \bar{z}, \quad \text{d) } z - \bar{z}.$$

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{a) } \vec{v} \text{ d'affixe } 2 + i, \quad \text{b) } \vec{w} \text{ d'affixe } -3 + 2i, \quad \text{c) } \vec{v} + \vec{w}, \quad \text{d) } 2\vec{v} - \vec{w}.$$

**Exercice 5-7.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

$$\text{a) } |1 - z| \leq \frac{1}{2} \quad \text{b) } \operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2} \quad \text{c) } \operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} \quad \text{d) } \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 \quad \text{e) } \left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| < 2$$

**Exercice 5-8.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$ , puis  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin(x)$ .
2. Linéariser  $\sin^4(x)$  puis  $\cos(x)\sin^4(x)$ .

**Exercice 5-9.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

**Exercice 5-10.**

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } u = -3, \quad \text{b) } v = 1 - i, \quad \text{c) } w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \quad \text{d) } z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. En déduire le module et un argument de  $uw$  et  $\frac{z}{v}$ .

**Exercice 5-11.** Soit  $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

1. Calculer  $z^2$ , déterminer le module et un argument de  $z^2$  et écrire  $z^2$  sous forme trigonométrique.

2. En déduire le module et un argument de  $z$ .

3. En déduire une expression de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 5-12.**

1. Donner la forme trigonométrique de  $(1 + i)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression très simple de  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ .

**Exercice 5-13.** Soient  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe exactement  $n$  nombres complexes  $w$  vérifiant  $w^n = z$ . Ces nombres sont appelés les  $n$  racines  $n$ -ième de  $z$ .

1. Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de  $-1$ .

2. Soit  $n \geq 2$  un entier. Déterminer les  $n - 1$  racines du polynôme complexe  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ .

**Exercice 5-14.**

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.

2. On note  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ .

3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de  $j$ .

**Exercice 5-15.**

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z = 7 + 24i, \quad \text{b) } z = 9 + 40i, \quad \text{c) } z = 1 + i.$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\text{a) } z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad \text{b) } z^2 = 3 - 4i.$$

**Exercice 5-16.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\text{a) } iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0, \quad \text{b) } (1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0,$$

$$\text{c) } z^4 + 10z^2 + 169 = 0, \quad \text{d) } z^3 + 3z - 2i = 0,$$

$$\text{e) } z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0, \quad \text{f) } \bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$$

$$\text{g) } z^5 - z = 0, \quad \text{h) } 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0.$$

**Exercice 5-17.** 

1. Donner les applications de  $\mathbb{C}$  qui représentent les transformations du plan suivantes.

a) La translation du vecteur d'affixe  $-2 + i$ .

b) L'homothétie de rapport 3 et de centre  $1 + 2i$ .

c) La rotation d'angle  $\pi/6$  et de centre 1.

d) La symétrie centrale du centre  $i$ .

2. Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .

$$\text{a) } f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i. \quad \text{b) } f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z. \quad \text{c) } f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1. \quad \text{d) } f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i.$$

**Exercice 5-18.** Soit  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $|c| < 1$ .

1. Montrer que  $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$  si et seulement si  $|z| \leq 1$ .
2. On notera  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$  le disque unité et  $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  le cercle unité. Montrer que l'application

$$f: D \rightarrow D \\ z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

est une bijection pour laquelle  $f(C) = C$ .

---

**Exercice 5-101.** Soit  $f: x \mapsto \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{-3, 0\}$ . Calculer  $f(1-i)$  et  $f(1+i)$ .

**Exercice 5-102.** Soit  $z = \frac{3}{\sqrt{3} + i}$ . Calculer  $z^4$ .

**Exercice 5-103.**

1. Calculer  $\cos^2(x) \sin^3(x)$  en fonction de  $\sin(x)$ .
2. Linéariser  $\cos^4(x)$ .

**Exercice 5-104.**

1. Donner les solutions complexes de  $z^4 = 1$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

**Exercice 5-105.**

1. Déterminer les quatre nombres complexes  $a, b, c$  et  $d$  différents de 1 qui sont solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^5 = 1$ .
2. Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ , on a  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$ .

**Exercice 5-106.** Déterminer l'ensemble des racines  $n$ -ièmes des nombres complexes suivants :

- a)  $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$  pour  $n = 3$ ,      b)  $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$  pour  $n = 4$ ,      c)  $z = -1$  pour  $n = 5$ .

**Exercice 5-107.** Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

**Exercice 5-108.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0$ .

**Exercice 5-109.** On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans  $\mathbb{C}$

**Exercice 5-110.** On considère la fonction  $f$  suivante :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z(1-z)$$

1. Déterminer les points fixes de  $f$ , c'est à dire résoudre  $f(z) = z$ .
2. Montrer que si  $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ , alors  $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ .

Indication : on pourra remarquer que  $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$ .