Correction Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1
1.

$$u_n = \frac{n+2}{2n-1} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

or la $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n} = 2$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

2.

$$u_n = \frac{3n^2-2n+3}{n^3-1} = \frac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^3})} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}\right)$$

or le terme de gauche tend vers 0 et le terme de droite tend vers 3. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3.

$$u_n = \frac{3n^2-5}{n+4} = \frac{n^2(3-\frac{5}{n^2})}{n(1+\frac{4}{n})} = (n)\left(\frac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}\right)$$

or le terme de gauche tend vers $+\infty$ et le terme de droite tend vers 3. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4.

$$u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

5.

$$u_n = \frac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n(1+\frac{\sqrt{n+5}}{n})}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \frac{n(1+\sqrt{\frac{n+5}{n^2}})}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Rq : au passage, $n = \sqrt{n^2}$ car n est positif

$$u_n = \frac{n(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

or le numérateur tend vers 1, le dénominateur tend vers 1. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

6.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

donc tend vers 0.

7. Par l'absurde ! Supposons que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l_1. Or on a la formule de trigo suivante

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1).$$

En particulier, si la suite $(\sin(n))_n$ converge alors la suite $(\cos(n))_n$ converge (vers l_2) car $\sin(1) \neq 0$. On en déduit que la suite $(e^{in})_n$ converge vers λ $(= l_1 + il_2)$. Or

$$e^{i(n+1)} = e^{in}e^{i}$$

et quand on prend la limite on a

$$\lambda = \lambda e^{i} \Rightarrow \lambda = 0$$

impossible car $|e^{in}| = 1$... Donc la suite $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite.

8. On a

$$-1 \leq \sin(n) \leq +1 \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{+1}{\sqrt{n}}$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{+1}{\sqrt{n}} = 0$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

9. On a

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+(1/n))}{(1/n)} = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

en posant $h = 1/n$. De plus $\ln(1) = 0$, donc on peut écrire

$$\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = (\ln)'(1) = 1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp(1)(= e^1 = e).$$

10. On a
$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \frac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(2+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, donc la suite ne converge pas.
12. On a
$$u_n = \frac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = (-1)\frac{3^n-2^n}{3^n-2^n} = -1$$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1, et converge donc vers -1.
13. On a
$$u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n\ln(2))}{\exp(100\ln(n))} = \exp(n\ln(2)-100\ln(n)) = \exp\left(n\left(\ln(2)-100\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$
or on sait que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2)-100\frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) \neq 0, > 0$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
14. $u_n \to \cos 0 = 1$.
15. On a $|u_n| \leq 1/n \to 0$.
16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1\,, \qquad u_{4_n+1} = 0 = u_{4n+3}\,, \qquad u_{4n+2} = \cos(2n\pi+\pi) = -1.$$
Donc, u_n n'a pas de limite.

Exercice 6-2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par
$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$
1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :
$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n > 0 \;\; \Rightarrow \;\; u_{n+1} > u_n$$

on en déduit que la suite (u_n) est croissante.
2. Dans la définition de (u_n), on remarque que le terme le plus grand est $\frac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\frac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{2n}\right) < u_n < n\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2} < u_n < 1$.
Comme la suite est croissante et majorée, elle converge (cf cours) vers une limite l, et cette limite vérifie

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1.$$

3. Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ une suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ. Alors

$$v_{2n} = v_n + u_n.$$

En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + l \Rightarrow l = 0$. Impossible vu l'encadrement de l dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite fini. Or elle est croissante, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6-3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On pose $v_n = u_n + a$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + a = \left(\frac{1}{2}u_{n-1} + 3\right) + a = \frac{1}{2}(u_{n-1} + a - a) + 3 + a \\ &= \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{a}{2} + 3 + a = \frac{1}{2}v_{n-1} + 3 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

D'où $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + 3 + \frac{a}{2}$.
2. La suite est géométrique si elle est de la forme $v_n = qv_{n-1}$. Il faut donc que a vérifie

$$3 + \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

3. Dans ce cas $v_n = (1/2)^n v_0 = (1/2)^n(u_0 - 6) = 2(1/2)^n$.
4. On obtient alors $u_n = v_n - a = 2(1/2)^n + 6$. Donc comme $(1/2)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que u_n tend vers 6.

Exercice 6-4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{2u_{n+1}+2} = \left(\frac{u_n+8}{2u_n+1} - 2\right) \times \frac{1}{\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2} \\ &= \frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{u_n+8+2(2u_n+1)} \\ &= \frac{-3u_n+6}{5u_n+10} \\ &= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n-2}{u_n+2} \\ &= \frac{-3}{5} v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{-3}{5}$.

2. On déduit alors que $v_n = (\dfrac{-3}{5})^n \times v_0 = \dfrac{-1}{3} \times (\dfrac{-3}{5})^n$.

3. Comme $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+2}$ alors $v_n(u_n+2) = u_n - 2$ donc $u_n(v_n-1) = -2(v_n+1)$ et ainsi $u_n = \dfrac{-2(v_n+1)}{v_n-1}$. On en déduit $u_n = -\dfrac{2[\frac{-1}{3} \times (\frac{-3}{5})^n + 1]}{\frac{-1}{3} \times (\frac{-3}{5})^n - 1}$.

4. Comme $-1 < \dfrac{-3}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{-3}{5})^n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{3} \times (\dfrac{-3}{5})^n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{3} \times (\dfrac{-3}{5})^n - 1 = -1$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercise 6-5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Par récurrence, posons $P_n :=$ "$u_n > 1$".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 2 > 1$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons P_{n+1}. On a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ donc par hypôthèse de récurrence $u_{n+1} > \sqrt{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi $u_{n+1} > 1$ donc P_{n+1} est vraie ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Par la question 1 on remarque que $\sqrt{2u_n+1} + u_n > 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n-1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n-1} - u_n) \times (\sqrt{2u_n+1} + u_n)}{\sqrt{2u_n+1} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n-1} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n-1)^2}{\sqrt{2u_n-1} + u_n} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que la suite $(u_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ est décroissante. **3.** Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors elle converge par le théorème de convergence monotone. On note l sa limite. On a l qui vérifie la relation de récurrence d'où : $l = \sqrt{2l-1}$. Ainsi on déduit que $l^2 = 2l - 1$ donc $(l-1)^2 = 0$ et ainsi $l = 1$.

Exercise 6-6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par récurrence posons $P_n :=$ "$0 \leq u_n \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$".

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = 1 \in [0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : On remarque que $1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \geq \sqrt{1+0} = 1 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc P_{n+1} est vraie et ainsi P_n est héréditaire.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1+u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{1+u_n} - u_n) \times (\sqrt{1+u_n} + u_n)}{\sqrt{1+u_n} + u_n} \\ &= \frac{1 + u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})) \times (u_n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}))}{\sqrt{1+u_n} + u_n} \end{aligned}$$

Or $u_n - (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \leq 0$ et $u_n + (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \geq 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite. La limite vérifie la relation de récurrence d'où $l = \sqrt{1+l}$ comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $l \geq 0$. On déduit que l est racine du polynômé $X^2 - X - 1 = (X - (\frac{1+\sqrt{5}}{2}))(X - (\frac{1-\sqrt{5}}{2}))$. Ainsi comme $l \geq 0$ on en déduit $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercise 6-7. Dans cette correction nous de donnons que sous-questions qui guident l'étude de chaque suite :

1. Montrez par récurrence que $u_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge.
Démontrez que la limite vaut 6.

2. Montrez (sans récurrence) que pour tout $n \geq 1$ on a $|u_{n+1}| \geq 2|u_n| - 1$.
Montrez par récurrence que $|u_{n+1}| \geq 2^{n-3} + 1$ pour tout $n \geq 3$.
En déduire que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ et que u_n change de signe pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conclure que u_n n'a pas de limite.

3. Montrez que $u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour tout $n \geq 0$.
Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **4.** Montrez par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \geq 0$.
Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 4.

5. Montrez par récurrence que $u_n \in [0, \frac{1}{3}]$ pour tout $n \geq 0$.
Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{3}$.

6. Calculez u_1, u_2, u_3 et u_4 et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Exercise 6-8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définit par $u_0 \in [0,1]$ et $u_n = \frac{3 - u_{n-1}^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$.

1.a. On a $f'(x) = -x$ donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, +\infty]$. Ainsi f est décroissante sur $[0, +\infty]$.

1.b. Soit $x \in [0, \sqrt{3}]$. Alors $f(x) = \frac{3-x^2}{2} \geq \frac{3-(\sqrt{3}^2}{2} = 0$ et $f(x) = \frac{3-x^2}{2} \leq \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2} \leq \sqrt{3}$. Ainsi $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$. D'où l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est stable par f.

1.c. Si l vérifie $f(l) = l$ alors l est racine du polynôme $\frac{3-X^2}{2} - X = \frac{1}{2}(X-1)(X+3)$. On vérifie alors que $f(1) = 1$ et c'est l'unique possibilité.

1.d. On note $I_1 = [0,1]$ et $I_2 = [1, \sqrt{3}]$. Soit $x \in I_1$ alors $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2} \geq \dfrac{3-1}{2} = 1$. De plus $I_1 \subset [0, \sqrt{(3)}]$ donc par la question 1.*b*. on en déduit que $f(x) \leq \sqrt{3}$. Ainsi $f(I_1) \subset I_2$. Soit $x \in I_2$ on a déjà $f(x) \geq 0$ par la question 1.*b*.. De plus $f(x) \leq \dfrac{3-1}{2} = 1$. Donc $f(I_2) \subset I_1$.

1.e. On sait que f' est négative sur $[0, \sqrt{3}]$. Ainsi pour tout $x \in [0, \sqrt{3}]$ on a $(f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) \geq 0$. Ainsi $f \circ f$ est croissant sur $[0, \sqrt{3}]$. De plus $f \circ f(I_1) \subset f(I_2) \subset I_1$ et $f \circ f(I_2) \subset f(I_1) \subset I_2$.

2. Comme $f \circ f$ laisse stable I_1 et I_2 et que $u_0 \in I_1, u_1 \in I_2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = f \circ f(u_{2(n-1)}) \in I_1$ et $u_{2n+1} = f \circ f(u_{2n-1} \in I_2$. On définit la fonction g tel que pour tout $x \in [0, \sqrt{3}]$ on a $g(x) = f \circ f(x) - x$. Pour conclure il suffit d'avoir g négative sur I_1 et g positive sur I_2. On calcule :

$$g'(x) = f'(x)f'(f(x)) - 1 = -xf(x) - 1 = \frac{x^3 - 3x - 2}{2} = \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{2} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{2}$$

Ainsi comme $\sqrt{3} < 2$ alors $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0, \sqrt{3}]$ on en déduit que g est décroissante. Or $g(0) = \dfrac{3}{2} \geq 0$, $g(1) = 1 - 1 = 0$ et $g(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. On en déduit que g est positive sur I_1 et donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n} - u2(n-1) \geq 0$ donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De même on en déduit que g est négative sur I_2 et donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n+1} - u2n - 1 \leq 0$ donc la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Par le théorème de convergence monotone comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée alors ces deux suites convergent. On note l_1 et l_2 ces limites respectives. Or l_1 et l_2 sont positifs car les deux suites sont positives, et vérifient la même relation $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. D'après la question 1.c on en déduit que $l_1 = l_2 = 1$. Ainsi la suite des termes pairs et celle des impairs convergent vers la même limite 1, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6-9. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse et définition de limite, on a

$$\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right| \leq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n| \leq \varepsilon\,|1+u_n| \leq \varepsilon + \varepsilon|u_n|\,,$$

où on a utilisé aussi l'inégalité triangulaire. De ça on trouve immédiatement $|u_n| \leq 1/(1-\varepsilon) \leq 2\varepsilon$, si on a choisi $\varepsilon \leq 1/2$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-10. 1. D'après un théorème du cours, $\big(w_n\big)_n$ converge aussi.

2. Si $\big(w_n\big)_n$ ne converge pas, alors au moins une entre $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ ne converge pas (il s'agit juste de la négation de la question précédente).

3. Ça suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6-11. 1. On peut écrire

$$w_n \;=\; u_n^2 + 2u_n\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \;=\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2\,.$$

2. Du point précédent, on déduit que $w_n \geq 0$. D'autre côté, par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$0 \;\leq\; w_n \;=\; \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2 \;\leq\; \varepsilon\,,$$

ce qui implique que chaque carré doit être plus petit que ε, donc chaque carré converge à 0.

3. Du point précédent, on a $v_n^2 \to 0$, qui implique $v_n \to 0$. Mais aussi le premier carré tend à 0, donc $u_n + 1/2v_n \to 0$; vu que $v_n \to 0$, on a finalement $u_n \to 0$.

Exercice 6-12. La suite $\big(u_n\big)_n$ est croissante, donc il existe $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Vu que la sous-suite $\big(u_{2n}\big)_n$ converge à $l \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que aussi la sous-suite $\big(u_{2n+1}\big)_n$ converge au même l : on aura donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = l$.

À ce point, il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse de croissance, on a

$$u_{2n} \;\leq\; u_{2n+1} \;\leq\; u_{2n+2}$$

et appliquer le théorème des gendarmes.

Exercice 6-13. 1.a. Par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$10-\varepsilon \;\leq\; \frac{u_{n+1}}{u_n} \;\leq\; 10+\varepsilon\,.$$

Alors, il suffit de prendre $\varepsilon = 5$ et $N = N_\varepsilon$, et utiliser le fait que u_n est positif.
1.b. Par récurrence sur $n \geq N$.
Initialisation Pour $n = N$, la propriété est facilement vérifiée.
Hérédité $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5\cdot 5^{n-N}u_N = 5^{n+1-N}u_N$.
La propriété est donc vraie pour tout $n \geq N$.
1.c. Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que $u_N > 0$ par hypothèse.

2.a. On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus), avec $\varepsilon = 1/2$.
2.b. En raisonnant comme avant, on prouve (encore par récurrence) que $u_n \leq \big(1/2\big)^{n-N}u_N$. On conclut en utilisant le fait que, par hypothèse, $0 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et le théorème des gendarmes.

Exercice 6-14. 1. On remarque que $u_{n+1} = u_n + 1/(n+1)^2$, et donc $\big(u_n\big)_n$ est évidemment croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n \;&=\; u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\;-\;u_n-\frac{1}{n} \;=\; u_n+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\;-\;u_n-\frac{1}{n}\\
&=\;\frac{1}{n\,(n+1)^2}\Big(n\;+\;n\,(n+1)\;-\;(n+1)^2\Big)\;=\;-\,\frac{2}{n\,(n+1)^2}\;<\;0\,.
\end{aligned}$$

2. Par monotonie, on a qu'il existe

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; U \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = V\,.$$

Toujours par monotonie, on sait que $u_1 \leq U$ et $V \leq v_1$. D'autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$; donc, par passage à la limite, on trouve que $U \leq V$ et les deux sont finis. Donc, les deux suites sont convergentes.

Exercice 6-101. On commence par remarquer que, par hypothèse de croissance de $\big(u_n\big)_n$, on a

$$l \;=\; \lim_{n\to+\infty} u_n \;\equiv\; \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad v_n \leq u_n \leq l\,.$$

1. En utilisant la définition de v_n, on trouve tout de suite que

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n \;&=\; \left(\frac{1}{n+1}\;-\;\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} u_j \;+\; \frac{u_{n+1}}{n+1} \;=\; -\,\frac{1}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} u_j \;+\; \frac{u_{n+1}}{n+1}\\
&=\;-\,\frac{v_n}{n+1}\;+\;\frac{u_{n+1}}{n+1}\;\geq\;\frac{1}{n+1}\,\big(-u_n+u_{n+1}\big)\;\geq\;0\,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé aussi la propriété $v_n \leq u_n$ pour écrire la première inégalité.
2. et 3. On a déjà montré que $v_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme v_n est croissante, alors il existe

$$l' = \lim_{n\to+\infty} v_n\,, \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad l' \leq l\,.$$

4. Par définition, on a

$$v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} u_j + \frac{1}{2n}\sum_{j=n+1}^{2n} u_j = \frac{1}{2}\,v_n + \frac{1}{2n}\sum_{j=n+1}^{2n} u_j\,.$$

Maintenant, par hypothèse de croissance de $\big(u_n\big)_n$, on a que le dernier terme peut être minoré par $u_n/2$.
5. En passant à la limite à droite et à gauche de l'inégalité qu'on vient de montrer, on trouve

$$l' \geq \frac{l}{2} + \frac{l'}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad l' \geq l\,.$$

Vu qu'on connaissait déjà l'inégalité opposée, on en déduit que $l = l'$.

Exercice 6-102. 1. C'est un calcul.
2. En utilisant la question précédente, on se réconduit à une somme télescopique : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Cela implique que $\big(u_n\big)_n$ est convergente, avec limite égale à 1.

Exercice 6-103. 1. et 2. Par récurrence, l'initialisation étant vérifiée par hypothèse. Prouvons alors l'hérédité : supposons que $1 < u_n \leq 2$. Cela implique tout de suite que $u_{n+1} > 1/4 \cdot 1^2 + 3/4 = 1$, et que $u_{n+1} \leq 1/4 \cdot 2^2 + 3/4 \leq 2$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. **3.** En utilisant la formule définissant u_{n+1}, la différence

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{4}\,u_n^2 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\,u_{n-1}^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,\left(u_n^2 - u_{n-1}^2\right) = \frac{1}{4}\,(u_n - u_{n-1})\,(u_n + u_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Le signe de $u_n + 1 - u_n$ est donc le même que celui de $u_n - u_{n-1}$. C'est alors une simple récurrence qui implique que $\big(u_n\big)_n$ est monotone. En particulier, cette suite converge à une valeur $\ell \in [1,2]$.
4. En passant à la limite dans la formule définissant u_{n+1}, on trouve

$$\ell = \frac{1}{4}\,\ell^2 + \frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell^2 - 4\,\ell + 3 = 0\,.$$

Cela implique $\ell = 3$ ou $\ell = 1$. La seule valeur admissible est donc $\ell = 1$, ce qui montre aussi que la suite est toujours décroissante.

Exercice 6-104. 1. Un calcul direct donne $f'(x) = 2(x-1)$, qui est positive sur $[1,+\infty[$. Maintenant, par croissance, ą suffit de calculer $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$: on a donc que $f\big(]1,2[\big) =]1,2[$, autrement dit l'intervalle $]1,2[$ est stable pour f.
2. Par récurrence.

<u>Initialisation</u> $u_0 = 3/2$ bien sûr appartient à l'intervalle.

<u>Hérédité</u> Supposons maintenant que $u_n \in]1,2[$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc, par stabilité de l'intervalle, on a aussi que $u_{n+1} \in]1,2[$.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On étudie $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, qui est donc toujours strictement négative dans $]1, 2[$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ pour tout n.
4. En particulier, la suite $\big(u_n\big)_n$ converge à une limite ℓ. Vue que la suite est décroissante, on a $1 \leq \ell \leq u_0 < 2$. En passant à la limite dans la formule qui définit u_{n+1}, par continuité de f on trouve que ℓ doit être un point fixe de f : $\ell = f(\ell)$. Le calcul au point 3. montre alors que soit $\ell = 1$, ou $\ell = 2$. La seule valeur admissible est $\ell = 1$.

Exercice 6-105. 1. Évident de la définition de u_{n+1}.
2. Si la suite converge à une limite ℓ, ℓ doit vérifier

$$\ell = \frac{1}{6}\ell^2 + \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell^2 - 6\ell + 9 = \big(\ell - 3\big)^2 = 0\,.$$

Donc, on a $\ell = 3$.
3. Il s'agit d'une simple récurrence.
Initialisation $u_0 = 0 < 3$ bien sûr.
Hérédité Supposons maintenant que $u_n < 3$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{6}3^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}2 = 3\,.$$

La propriété est alors vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $f(x) = (1/6)\,x^2 + (3/2)$. On a

$$f(x) - x = \frac{1}{6}\,\big(x^2 + 9 - 6x\big) = \frac{(x-3)^2}{6} \geq 0\,.$$

Étant donné que $u_{n+1} = f(u_n)$, on voit tout de suite que u_n est croissante. Elle admet donc une limite finie ℓ, qui doit être (par le point 3.) $\ell \leq 3$. Par le point 2., on a donc $\ell = 3$.

Exercice 6-106. 1. $u_1 = 2$, $u_2 = 3/2$ et $u_3 = 5/3$.
2. C'est une simple récurrence. On se concentre sur l'hérédité : d'un côté, comme $u_n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + 1 = 2\,.$$

D'autre côté, comme $u_n \leq 2$, on a aussi $u_{n+1} \geq 1 + (1/2) = 3/2 \geq 1$. La propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On commence par remarquer que, de la définition de u_{n+1}, on trouve tout de suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{2n+2} = 1 + \frac{u_{2n}}{1 + u_{2n}} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = 1 + \frac{u_{2n+1}}{1 + u_{2n+1}}\,. \tag{1}$$

On introduit donc la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}\,.$$

Un simple calcul montre que

$$f(x) - x = -\frac{x^2 - x - 1}{(1+x)}$$

qui est donc positif si $x^2 - x - 1 \leq 0$. En cherchant les racines de ce polynôme de degré deux, on trouve finalement

$$\begin{aligned} f(x) &\geq x \qquad && \text{si} \qquad x \in \,]0\,, x_0] \\ f(x) &\leq x \qquad && \text{si} \qquad x \geq x_0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

où on a défini $x_0 := \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. De plus, un nouveau calcul simple montre que

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f \quad \text{est croissante.}$$

Grâce à cette propriété, c'est facile à voir que les intervalles

$$[1, x_0] \quad \text{et} \quad [x_0, 2] \qquad\qquad \text{sont stables pour } f\,. \tag{3}$$

En fait, par croissance ça suffit de calculer

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq 1 \\ f(2) &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leq 2 \\ f(x_0) &= 2\,\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 2\,\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\,\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ &= 2\,\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5} = x_0\,. \end{aligned}$$

Maintenant, on revient aux sous-suites des indices paires et impaires, introduites dans (1). Commençons par considérer la suite $\left(u_{2n}\right)_n$. Vu que $u_2 = 3/2 < x_0$, une simple récurrence, combinée avec (3) et le fait que $u_{2n+2} = f(u_{2n})$, montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad u_{2n} \in [1, x_0]\,.$$

Cette propriété, mise ensemble à (2), implique que $\left(u_{2n}\right)_n$ est croissante. En particulier, elle admet une limite finie ℓ_p telle que $1 < u_2 \leq \ell_p \leq x_0$. Un argument tout à fait similaire montre que la sous-suite des indices impaires $\left(u_{2n+1}\right)_n$ est inclue dans $[x_0, 2]$ et qu'elle est décroissante. Donc, elle aussi admet une limite ℓ_i telle que $x_0 \leq \ell_i \leq u_1 < 2$.

Pour dire que $\left(u_{2n}\right)_n$ et $\left(u_{2n+1}\right)_n$ sont adjacentes, il nous reste à prouver que la différence

$$u_{2n+1} - u_{2n} \longrightarrow 0 \qquad\qquad \text{quand} \qquad n \to +\infty\,. \tag{4}$$

On commence par calculer, pour $0 < x < y$, la quantité

$$f(y) - f(x) = \ldots = -\,\frac{y-x}{(1+x)\,(1+y)}\,.$$

De plus, si $x \geq 1$, on a donc que

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}\,|y-x|\,.$$

Cela implique tout de suite que

$$\begin{aligned} |u_{2n+1} - u_{2n}| &= |f(u_{2n-1}) - f(u_{2n-2})| \\ &\leq \frac{1}{4}\,|u_{2n-1} - u_{2n-2}| \leq \ldots \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1 - u_0|\,. \end{aligned}$$

Cette estimation implique immédiatement (4), et donc les deux suites sont adjacentes.

4. Du point précédent, on en déduit en particulier que $\ell_p = \ell_i = \ell$. En plus, en passant à la limite dans la rélation $u_{2n+2} = f(u_{2n})$ et utilisant la continuité de f, on a que ℓ doit vérifier $\ell = f(\ell)$: dans l'intervalle considérée, la seule possibilité est que $\ell = x_0$.

Exercice 6-107. Dans tous les cas qui suivent on considère que les suites commencent au terme $n = 0$.

1. On pose $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-2}{n(n+2)} < 0\,.$$
Donc $(u_n)_n$ est décroissante.
2. On pose $u_n = n - 2^n$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - 2^{n+1} - (n - 2^n) = 1 - 2^n \times 2 + 2^n = 1 + 2^n(-2+1) = 1 - 2^n \leq 1 - 2^0 = 0\,.$$
Donc $(u_n)_n$ est décroissante.
3. On pose $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e^{n+1-n}}{n+1} = \frac{e}{n+1}\,.$$
Or $3 < e < 4$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir du rang 3.
4. On pose $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$. On a :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1+1)(n+1+2)\dots(n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}\\ &= \frac{(n+1+n)(n+1+n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \geq 1\,.\end{aligned}$$
Donc $(u_n)_n$ est croissante.
5. On pose $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+4} - \frac{n-1}{n+3} = \frac{n(n+3) - (n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{4}{(n+4)(n+3)} \geq 0\,.$$
Donc $(u_n)_n$ est croissante.
6. On pose $u_n = n - \sinh(n)$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - \sinh(n+1) - (n - \sinh(n)) = 1 - \sinh(n+1) + \sinh(n)\,.$$
Or $\sinh(n+1) = \sinh(n)\cosh(1) + \sinh(1)\cosh(n) \geq \sinh(n) + \sinh(1) \geq \sinh(n) + 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc $(u_n)_n$ est décroissante.

Exercice 6-108. 1. On commence par remarquer la suite d'inégalités suivante :
$$1 \leq u_n \leq v_n \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$
On a $u_{n+1} = u_n + 1/(n+1)! \geq u_n$, donc $\big(u_n\big)_n$ est croissante. Pour $\big(v_n\big)_n$, on calcule
$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\,n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}\\ &= \frac{1}{(n+1)\,n\,(n+1)!}\,\big((n+1)\,n + n - (n+1)^2\big)\\ &= -\frac{1}{(n+1)\,n\,(n+1)!} < 0\,,\end{aligned}$$
donc $\big(v_n\big)_n$ est bien décroissante.

2. Grâce au point précédent, on sait que les deux suites $\big(u_n\big)_n$ et $\big(v_n\big)_n$ admettent une limite, U et V respectivement. En plus, on peut écrire une estimation plus précise : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a
$$1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1\,,$$
et alors U et V ont deux valeurs finies, et on a $U \leq V$.