1) a) B, symétrique définie positive, a ses valeurs propres réelles strictement positives. Il existe donc bien une plus petite valeur propre, λ_{min}, ainsi qu'une plus grande, λ_{max}. Plus précisément, B est diagonalisable en base orthonormée et à valeurs propres réelles strictement positives. Notons $(\lambda_i, v_i)_{i=1}^{n}$ les modes propres de B tels que $v_i^T v_j = \delta_{ij}$: les v_i forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Il existe des coefficients réels α_i, $i=1,\dots,n$, tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. On a

- d'une part $\|y\|^2 = y^T y = \left(\sum_i \alpha_i v_i\right)^T \left(\sum_j \alpha_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j v_i^T v_j$

$$= \sum_i \alpha_i^2 v_i^T v_i \quad \text{car } (v_i) \text{ est orthogonal}$$
$$= \sum_i \alpha_i^2 \quad \text{car } (v_i) \text{ est normé}$$

- d'autre part $y^T B y = \left(\sum_i \alpha_i v_i\right)^T B \left(\sum_j \alpha_j v_j\right)$

$$= \left(\sum_i \alpha_i v_i\right)^T \left(\sum_j \lambda_j \alpha_j v_j\right)$$
$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \lambda_j \alpha_j v_i^T v_j$$
$$= \sum_i \lambda_i \alpha_i^2, \quad \text{donc}$$

$$\lambda_{min} \|y\|^2 = \lambda_{min} \sum_i \alpha_i^2 \leq y^T B y \leq \lambda_{max} \sum_i \alpha_i^2 = \lambda_{max} \|y\|^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

b) $\nabla f(x) = Ax - b$ (cf. cours et feuille de TD n° 5).

2) a) cf. contrôle du 11 mai 2020.

b) M est triangulaire (inférieure), donc son déterminant vaut le produit de ses termes diagonaux qui sont ceux de A : $\det M > 0$ d'après 2a) donc M est bien inversible.

c) $y^T A y = y^T(D+E+F)y = y^T D y + y^T E y + y^T F y$.

Or $y^T F y \in \mathbb{R}$, donc $(y^T F y)^T = y^T F y$, soit $y^T F^T y = y^T F y$. D'autre part, A étant symétrique, $F^T = E$: on a ainsi $y^T A y = y^T D y + 2 y^T E y$.

Donc $y^T A y + y^T D y = 2(y^T D y + y^T E y) = 2 y^T (D+E) y = 2 y^T M y$,

soit, finalement, $y^T M y = \frac{1}{2}(y^T A y + y^T D y)$,

d) A étant définie positive, $y^T A y > 0$ si $y \neq 0$, et, puisque D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, $y^T D y = \sum_i D_{ii} y_i^2 > 0$ si $y \neq 0$: donc $y^T M y = \frac{1}{2}(y^T A y + y^T D y) > 0$ si $y \neq 0$.

Par ailleurs
$$\begin{aligned} y^T M^{-1} y &= y^T (M^T)^{-1} M^T M^{-1} y \\ &= (M^{-1}y)^T M^T (M^{-1} y) \\ &= (M^{-1}y)^T M (M^{-1}y) \end{aligned}$$
car cet objet est un réel (cf. le début de la réponse à 2c)). Donc $y^T M^{-1} y > 0$ si $M^{-1} y \neq 0$, c'est-à-dire si $y \neq 0$.

e) La méthode de Gauss-Seidel s'écrit, pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné,
$$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ soit}$$
$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + (M^{-1}N - I) x^{(k)} + M^{-1} b \\ &= x^{(k)} + M^{-1}((N-M)x^{(k)} + b) \\ &= x^{(k)} + \alpha w^{(k)} \end{aligned}$$
si on pose $\alpha = 1$ et $w^{(k)} = M^{-1}((N-M)x^{(k)} + b)$.

$w^{(k)}$ étant défini ainsi on a $w^{(k)T} \nabla f(x^{(k)}) = \left[M^{-1}((N-M)x^{(k)}+b)\right]^T (Ax^{(k)}-b)$

$$= [(N-M)x^{(k)}+b]^T M^{-1\,T}(Ax^{(k)}-b)$$

$$= (-Ax^{(k)}+b)^T M^{-1\,T}(Ax^{(k)}-b) \quad \text{car } A = M-N$$

$$= -(Ax^{(k)}-b)^T M^{-1\,T}(Ax^{(k)}-b)$$

$$= -(Ax^{(k)}-b)^T M^{-1}(Ax^{(k)}-b).$$

D'après la question précédente, ce réel est strictement négatif si $Ax^{(k)}-b$: la méthode de Gauss-Seidel est donc bien une méthode de descente.

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_k(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)})$, c'est-à-dire

$$g_k(\alpha) = \frac{1}{2}(x^{(k)}+\alpha w^{(k)})^T A (x^{(k)}+\alpha w^{(k)}) - (x^{(k)}+\alpha w^{(k)})^T b$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} w^{(k)T} A w^{(k)} + \alpha\, w^{(k)T}(Ax^{(k)}-b) + f(x^{(k)}).$$

Cette fonction est un polynôme de degré 2. Si $w^{(k)} \neq 0$, c'est-à-dire si $-M^{-1}(Ax^{(k)}-b) \neq 0$, ce polynôme est strictement convexe (puisque $w^{(k)T}Aw^{(k)} > 0$) et admet un minimum (unique) en le point, noté $\alpha^{(k)}$, annulant la dérivée de g_k. $g_k'(\alpha) = \alpha\, w^{(k)T} A w^{(k)} + w^{(k)T}(Ax^{(k)}-b)$, donc $\alpha^{(k)}$ est solution de $\alpha^{(k)} w^{(k)T} A w^{(k)} + w^{(k)T}(Ax^{(k)}-b) = 0$,

ce qui donne $\alpha^{(k)} = \dfrac{w^{(k)T}(b-Ax^{(k)})}{w^{(k)T} A w^{(k)}}$,

ce qu'il fallait démontrer.

b) $f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) = g_k(\alpha^{(k)}) - f(x^{(k)})$

$$= \frac{\alpha^{(k)2}}{2} w^{(k)T} A w^{(k)} + \alpha^{(k)} w^{(k)T}(A x^{(k)} - b)$$

$$= \frac{(w^{(k)T} r^{(k)})^2}{2\, w^{(k)T} A w^{(k)}} - \frac{(w^{(k)T} r^{(k)})^2}{w^{(k)T} A w^{(k)}} = -\frac{1}{2} \frac{(w^{(k)T} r^{(k)})^2}{w^{(k)T} A w^{(k)}}.$$

(Remarquer que ce réel est bien négatif !)

On a donc $\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| = \frac{1}{2} \frac{(w^{(k)T} r^{(k)})^2}{w^{(k)T} A w^{(k)}}$.

Or $w^{(k)} = M^{-1}(-A x^{(k)} + b) = M^{-1} r^{(k)}$, donc $r^{(k)} = M w^{(k)}$.

Ainsi on a aussi $\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| = \frac{1}{2} \frac{(w^{(k)T} M w^{(k)})^2}{w^{(k)T} A w^{(k)}}$.

c) D'après 1a), $w^{(k)T} A w^{(k)} \leq \lambda_{max} \|w^{(k)}\|^2$.

D'après 2c), $w^{(k)T} M w^{(k)} = \frac{1}{2}\left(w^{(k)T} A w^{(k)} + w^{(k)T} D w^{(k)}\right)$,

donc $w^{(k)T} M w^{(k)} \geq \frac{1}{2}(\lambda_{min} + d_{min}) \|w^{(k)}\|^2$ d'après 1a).

Ainsi, $$\frac{1}{2} \frac{(w^{(k)T} M w^{(k)})^2}{w^{(k)T} A w^{(k)}} \geq \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{4}(\lambda_{min} + d_{min})^2 \|w^{(k)}\|^4}{\lambda_{max} \|w^{(k)}\|^2} = \frac{(\lambda_{min} + d_{min})^2 \|w^{(k)}\|^2}{8 \lambda_{max}}.$$

d) La suite $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et elle est minorée car f l'est sur $\mathbb{R}^n$ (par $\frac{1}{2} x^T A x - x^T b$ où x est la solution de $Ax = b$). Donc $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge lorsque k tend vers l'infini. Donc $\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. D'après 3c) on a donc $\|w^{(k)}\|^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, donc $w^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \in \mathbb{R}^n$, donc $r^{(k)} = M w^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

e) Soit x l'unique solution de $Ax = b$.

On a $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, pour tout k,

donc $r^{(k)} = Ax - Ax^{(k)} = A(x - x^{(k)})$, soit

$$x - x^{(k)} = A^{-1} r^{(k)}.$$

D'après la question précédente, $r^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, donc

$$x - x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad : \quad x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x.$$

La méthode de Gauss-Seidel à pas optimal converge pour tout choix de $x^{(0)}$ (pour une matrice symétrique définie positive).