Partiel Analyse matricielle 15 mars 2019

## Exercice 1

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $A$ est diagonalisable en base orthonormée : il existe $U$ orthogonale et $D$ diagonale telles que $A = UDU^T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ (réelles).

On a
$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle UDU^Tx, UDU^Tx \rangle \\
&= \langle DU^Tx, DU^Tx \rangle \text{ car } U \text{ orthogonale} \\
&= \langle Dy, Dy \rangle \quad \text{où } y = U^T x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i^2 \\
&\leq \rho(A)^2 \|y\|_2^2 = \rho(A)^2 \|x\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi $\|Ax\|_2 \leq \rho(A) \|x\|_2$.

b) Par a) $|||A|||_2 \leq \rho(A)$.

De plus si $v$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors $\|Av\|_2 = \rho(A)\|v\|_2$, $\|v\|_2 \neq 0$ donc $|||A|||_2 \geq \rho(A)$. Ainsi $|||A|||_2 = \rho(A)$.

2) a) Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}-X & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2}-X \end{vmatrix} = (1-X)\left(\left(\frac{5}{2}-X\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= (1-X)(2-X)(3-X).$$

Ainsi $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$ et $\rho(A) = 3 = |||A|||_2$, car $A$ symétrique.

On a aussi $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|} = \dfrac{3}{1} = 3$.

On sait $|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^{3} |A_{ij}| = \max(1, 3, 3) = 3$

et $|||A|||_\infty = |||A^T|||_1 = |||A|||_1 = 3$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}^*$.

(i) Par le cours $\sum_{i=0}^{\infty} (rA)^i$ converge

si et seulement si $\rho(rA) < 1$

si et seulement si $|r| < \dfrac{1}{3}$

car $\rho(rA) = |r| \rho(A)$ et $\rho(A) = 3$.

(ii) Ainsi si $|r| < \dfrac{1}{3}$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} (rA)^i$ converge et $I_3 - rA$ inversible d'inverse $\sum_{i=0}^{\infty} (rA)^i$.

(iii) $\dfrac{1}{r}$ valeur propre de $A$

$\iff$ il existe $v \neq 0$ tel que $Av = \dfrac{1}{r} v$

$\iff$ il existe $v \neq 0$ tel que $(I_3 - rA)v = 0$

$\iff$ $I_3 - rA$ singulière

Ainsi $I_3 - rA$ inversible

$\iff$ $\dfrac{1}{r} \notin \sigma(A)$

$\iff$ $r \neq 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$.

## Exercice 2

1) On calcule les mineurs principaux de B :

$\Delta_1 = 4 > 0$ ; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0$

$$\Delta_3 = \det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 120 + 12 + 12 - 20 - 24 - 36$$
$$= 64 > 0$$

De plus B est symétrique : B est symétrique définie positive.

2) ① On met des zéros sous la diagonale dans la 1ère colonne de B : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$ ; $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_1$

On pose $M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$B^{(2)} = M^{(1)} B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

② On met des zéros sous la diagonale dans la 2e colonne de B : $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - \frac{1}{2} L_2^{(2)}$

On pose $M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$B^{(3)} = M^{(2)} B^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

③ On pose $U = B^{(3)}$ et $L = (M^{(2)} M^{(1)})^{-1} = (M^{(1)})^{-1} (M^{(2)})^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $B = LU$

3) On pose $D^{1/2} = \mathrm{diag}(2,2,2)$. On a alors

$B = (LD^{1/2})(D^{-1/2}U)$. On pose $C = LD^{1/2}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^{-1/2}U = C^T.$$

$B = CC^T$ est la factorisation de Cholesky de B.

4) $Bx = b \iff CC^Tx = b \iff \begin{cases} Cy = b \\ C^Tx = y \end{cases}$

$$Cy = b \iff \begin{cases} 2y_1 = 8 \\ y_1 + 2y_2 = 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 11 \end{cases} \iff y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C^Tx = y \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + \text{[illegible]}\,x_3 = 4 \\ 2x_2 + \text{[illegible]}\,x_3 = 3 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \iff x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ou $Bx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

avec $Ly = b \iff \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_1/2 + y_2 = 10 \\ y_1/2 + y_2/2 + y_3 = 11 \end{cases} \iff y = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad Ux = y \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_3 = 4 \end{cases} \iff x = \ldots$

## Exercice 3

1) Soit $i,j \in \{1,\dots,n\}$, on a $P_{j,i} = \delta_{n+1-j,i} = \delta_{n+1-i,j}$

car $n+1-j = i \iff n+1-i = j$ donc $P_{j,i} = P_{i,j}$.

Ainsi P est symétrique.

$$(PP^T)_{ij} = (PP)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{n+1-i,k}\,\delta_{n+1-k,j}}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } n+1-i = k = n+1-j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

$$= \delta_{ij}$$

Ainsi $P^2 = I_n$ et P est orthogonale

2) Soit $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

$$B_{i,j} = (PAP)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} P_{ik} A_{kl} P_{lj} = \sum_k \sum_l \delta_{n+1-i,k} A_{kl} \delta_{n+1-l,j}$$

$$= A_{n+1-i,\, n+1-j}.$$

3) Soit $1 \leq m \leq n$.
Par 2), $(B_{ij})_{1\leq i,j\leq m} = \left(A_{n+1-i,\, n+1-j}\right)_{1\leq i,j\leq m}$

$1 \leq n+1-i \leq m$
$\iff n+1-m \leq i \leq n$

$$= \left(A_{i',j'}\right)_{n+1-m\leq i',j'\leq n}$$

Ainsi $\det (B_{ij})_{1\leq i,j\leq m} = \alpha_{n+1-m} \neq 0$.

$B$ admet donc une factorisation $LU$. On note $B = L_0 U_0$.

4) On écrit $A = PBP = PL_0U_0P$
i.e. $A = (PL_0P)(PU_0P)$.

On pose $U = PL_0P$ et $L = PU_0P$.

Alors pour tout $i,j$, $U_{ij} = (L_0)_{n+1-i,\, n+1-j}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n+1-i = n+1-j \\ 0 & \text{si } n+1-i < n+1-j \end{cases}$$

i.e. $U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } j<i \end{cases}$ donc $U$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

De même $L$ est triangulaire inférieure inversible (car $U_0$ l'est).

Exercice 4

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$y_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_k + Bx_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$$

donc $y_{k+1} = C y_k$ avec $C = \begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

2) Si $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ alors $x_{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ dans $\mathbb{R}^n$

donc $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2n}}$.

Réc. si $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_{\mathbb{R}^{2n}}$ alors ses $n$ premières composantes tendent vers 0 donc $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_{\mathbb{R}^n}$.

3) Par le cours : $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_{\mathbb{R}^{2n}}$ pour tout $y_1 \in \mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Ainsi $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.