CORRIGÉ DU CONTRÔLE 2 DU 11 MAI 2020

I/ 1. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, posons $x_i \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x_{i_j} = \delta_{ij}$ $\forall j$.
On a $x_i^T A x_i = A_{ii} = D_{ii}$, et $x_i^T A x_i > 0$ puisque A est définie positive. Donc $D_{ii} > 0$.

2. Les valeurs propres de $D-U$ sont les coefficients diagonaux de D, donc 0 n'est pas valeur propre de $D-U$: $D-U$ est inversible. Il en est de même de $D-L$ et l'algorithme est bien défini, et

$$x^{(k+1)} = (D-U)^{-1} L\, y^{(k)} + (D-U)^{-1} b = (D-U)^{-1} L\left((D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-L)^{-1} b\right) + (D-U)^{-1} b$$

$$= (D-U)^{-1} L (D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-U)^{-1}\left(I + L(D-L)^{-1}\right) b .$$

3. (a) $(D-U)^{-1} L (D-L)^{-1} U p = \lambda p$, donc $L(D-L)^{-1} U p = \lambda (D-U) p$.
Or $A = D-L-U$, donc $D-U = A+L$: ainsi $L(D-L)^{-1}Up = \lambda(A+L)p$.

(b) $$L D^{-1} U + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U = L D^{-1}(D-L)(D-L)^{-1} U + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U$$

$$= L D^{-1}\left[(D-L) + L\right](D-L)^{-1} U .$$

Donc on a bien $L D^{-1} U + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U = L (D-L)^{-1} U$.

(c) $L D^{-1} U p + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U p = L (D-L)^{-1} U p$ d'après 3.(b),
donc $L D^{-1} U p + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U p = \lambda (A+L) p$ d'après 3.(a).

(d) $L D^{-1} L (D-L)^{-1} U p = L D^{-1} \left(\lambda (A+L) p\right)$ d'après 3.(a), d'où l'égalité (2).

(e) D'après l'équation (2) de l'énoncé, $L D^{-1} U p + \lambda L D^{-1} (A+L) p$
$= L D^{-1} U p + L D^{-1} L (D-L)^{-1} U p$ et ce vecteur est égal, d'après l'équation (1) de l'énoncé, à $\lambda (A+L) p$.

(f) Cette dernière équation se réécrit
$$LD^{-1}Up = \lambda(A+L)p - \lambda LD^{-1}(A+L)p = \lambda Ap + \lambda Lp - \lambda LD^{-1}(A+L)p.$$
Or $A+L = D-U$, d'où le résultat.

(g) En développant la dernière égalité on écrit
$$LD^{-1}Up = \lambda Ap + \lambda Lp - \lambda LD^{-1}Dp + \lambda LD^{-1}Up$$
$$= \lambda Ap + \lambda LD^{-1}Up \text{, donc}$$
$$(1-\lambda)LD^{-1}Up = \lambda Ap.$$

4. (a) D'après le résultat de 3.(g), $(1-\lambda)p^*LD^{-1}Up = \lambda p^*Ap$.

Or
- p^*Ap est un réel strictement positif car A est symétrique définie positive
- $p^*LD^{-1}Up = p^*U^*D^{-1}Up$ car A est symétrique réelle donc $U = L^T = L^*$, donc

$$p^*LD^{-1}Up = (Up)^*D^{-1}(Up)$$ qui est un réel positif ou nul puisque D^{-1} est diagonale avec coefficients diagonaux strictement positifs. Attention : ce réel peut être nul car Up peut l'être.

Ainsi l'équation $(1-\lambda)p^*LD^{-1}Up = \lambda p^*Ap$ peut se réécrire
$$\lambda = \alpha(1-\lambda) \text{ en notant } \alpha = \frac{p^*LD^{-1}Up}{p^*Ap} \text{ (noter que } \alpha \in \mathbb{R}_+).$$
En écrivant λ sous la forme $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,

on obtient $\begin{cases} a = \alpha(1-a) \\ b = -\alpha b \end{cases}$. Puisque $\alpha \geq 0$, on en déduit que

$b = 0$ et $a = \frac{\alpha}{1+\alpha} \in [0,1[$, puis que $\lambda = a \in [0,1[$.

(b) Si $x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_\infty$, x_∞ satisfait à $x_\infty = B x_\infty + c$, car $x \mapsto Bx + c$ est continue, soit $(I - B) x_\infty = c$. D'après un résultat vu en cours, si B est une matrice de rayon spectral strictement inférieur à 1, $(I - B)$ est inversible. Dans le cas présent, le spectre de B étant inclus dans $[0, 1[$, $\rho(B) < 1$ donc $(I - B) x_\infty = c$ admet une unique solution.

(c) $x^{(k+1)} = B x^{(k)} + c$ et $(I - B) x_\infty = c$ impliquent que
$$x^{(k+1)} - x_\infty = B(x^{(k)} - x_\infty), \text{ soit } x^{(k)} - x_\infty = B^k (x^{(0)} - x_\infty).$$
D'après un résultat vu en cours, la suite $(x^{(k)} - x_\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout choix de $x^{(0)} - x_\infty$, car $\rho(B) < 1$.
Donc $x^{(k)} \longrightarrow x_\infty$.

(d) $(D - L) y_\infty = U x_\infty + b$. Comme on a $B x_\infty + c = x_\infty$, on a aussi $(D - U) x_\infty = L y_\infty + b$, donc $D y_\infty = L y_\infty + U x_\infty + b = D x_\infty$.
D étant inversible, $x_\infty = y_\infty$.

(e) On a finalement $(D - L) x_\infty = U x_\infty + b$, soit $(D - L - U) x_\infty = b$.
Or $A = D - L - U$: $A x_\infty = b$. Donc $x_\infty = x$.