V) TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE
TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

A) Rappels

On note C^0_p l'ensemble des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ et continues, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour $f \in C^0_p$, pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit $\hat{f}(k)$ par :

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi k x}\, dx$$

(cette formule définit bien un nombre complexe).

$\hat{f}(k)$ est appelé k^e coefficient de Fourier de f.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $S_N(f)$ par :

$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)\, e^{2i\pi k \cdot}$, c'est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2i\pi k x}$, $x \in \mathbb{R}$.

On admet le

Théorème Soit $f \in C^0_p$. On a $S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{L^2(0,1)} f$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 |S_N(f)(x) - f(x)|^2\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

On a aussi $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$ (égalité de Parseval).

Remarque A priori, la convergence de $S_N(f)$ vers f n'est pas ponctuelle. Elle l'est cependant si f, en plus d'être de classe C^0_p, est de classe C^1 par morceaux.

Ce résultat se généralise à $f \in L^2(0,1)$ (f mesurable sur $[0,1]$ et de carré intégrable) (il suffit de prolonger f par périodicité sur $\mathbb{R}$ pour être à nouveau dans le cadre des fonctions périodiques). Pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$, on peut montrer que

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{2i\pi k \cdot}, \text{ ce qui}$$

a le sens de $S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{L^2} f$.

L'égalité de Parseval est encore vraie pour $f \in L^2(0,1)$.

L'application $F : \begin{cases} L^2(0,1) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \end{cases}$

est une isométrie de $L^2(0,1)$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Le fait que toute fonction de $L^2(0,1)$ (à valeurs complexes) puisse s'écrire comme une somme (infinie) de termes du type $\alpha_k e^{2i\pi k x}$ est à comprendre (comme en dimension finie) ainsi : $(e^{2i\pi k\cdot})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une « base » de $L^2(0,1)$.

Dans ce cadre où la dimension est infinie on parle de base hilbertienne.

De plus, $L^2(0,1)$ est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Remarquons que la base hilbertienne $\left(x \longmapsto e^{2i\pi kx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée :

$$\langle e^{2i\pi k\cdot}, e^{2i\pi j\cdot}\rangle = \int_0^1 e^{2i\pi kx} e^{-2i\pi jx}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{2i\pi(k-j)x}\,dx = \delta_{jk}.$$

La formule $\quad f \overset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{2i\pi k\cdot}$

s'écrit donc $\quad f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle f, e^{2i\pi k\cdot}\rangle}_{\hat{f}(k)} e^{2i\pi k\cdot},$

c'est l'analogue parfait de :

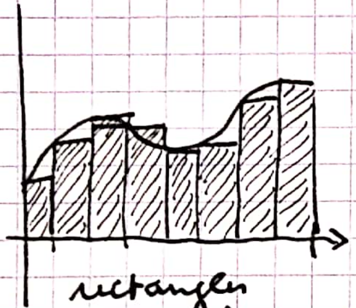
$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base orthonormée.

Dans cette partie du cours d'analyse matricielle on s'intéresse au calcul approché des coefficients de Fourier d'une fonction f, $\hat{f}(k)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

L'idée de départ est d'utiliser une formule des rectangles à gauche pour approcher l'intégrale $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi kx}\,dx$, sur un maillage de $[0,1]$ composé de N intervalles de même longueur $\left(\frac{1}{N}\right)$.

On est alors amené à calculer les nombres complexes $\hat{f}_k^N$, $k \in \mathbb{Z}$, défini par

$$\hat{f}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-\frac{2i\pi k j}{N}}$$



rectangles à gauche...

On a le résultat d'approximation (admis) :

<u>Th</u>

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $g \in C^1([0,1])$ on a

$$\left| \int_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leqslant C \|g'\|_\infty \frac{1}{N}$$

Ce théorème garantit la convergence à l'ordre 1 de la méthode des rectangles à gauche, pour les fonctions de $C^1([0,1])$. Ce résultat est optimal : pour une fonction $g \in C^1([0,1])$ quelconque, on ne doit pas espérer mieux, ni même pour $g \in C^m([0,1])$ quelconque : il est facile de voir que pour $g(x) = x$, l'erreur de la méthode des rectangles à gauche est bien en $\frac{1}{N}$.

Cependant, pour une fonction <u>périodique</u> et régulière, on a beaucoup mieux :

Th (théorème encore admis)

Soit $m \geq 1$ un entier.

Soit g une fonction de classe $C^m(\mathbb{R})$ et 1 périodique.

Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q

$$\left| \int_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leq \frac{C}{N^m} \quad \forall N.$$

Remarque pour g 1-périodique et de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, la convergence de la méthode est dite spectrale : $\forall m \geq 1$, $\exists C_m$ t.q.

$$\left| \int g - \frac{1}{N} \sum g\left(\frac{j}{N}\right) \right| \leq \frac{C_m}{N^m} \quad (\text{Attention, } C_m \text{ dépend de } m!).$$

Ce résultat justifie l'utilisation de la méthode des rectangles à gauche plutôt qu'une méthode d'ordre supérieur, pour des fonctions périodiques (et régulières).

B) Transformée de Fourier discrète.

Soit f une fonction 1-périodique. On appelle transformée de Fourier discrète de f à N points la suite $(\hat{f}_k^N)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par $\hat{f}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2i\pi \frac{kj}{N}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme La suite $(\hat{f}_k^N)_{k \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N.

Démo $\hat{f}_{k+N}^N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2i\pi (k+N) j/N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2i\pi kj/N} \underbrace{e^{-2i\pi j}}_{1}$

$= \hat{f}_k^N$.

En conséquence : on ne garde que N termes de la suit $(\hat{f}_k^N)_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\left(\hat{f}_k^N\right)_{k=0}^{N-1}.$$

Déf On appelle transformation de Fourier discrète à N points l'application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, notée F^N, définie par

$$(F^N u)_k = \hat{u}_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2i\pi kj/N}, k=0,\dots,N-1,$$

pour $u \in \mathbb{C}^N$.

Cette application linéaire de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ peut bien sûr être représentée au moyen d'une matrice carrée (dans toute la suite on s'intéressera à la représentation de cette application relativement à la base canonique).

Lemme La matrice de représentation de la transformation de Fourier discrète à N points, dans la base canonique, est symétrique complexe (pas hermitienne !).

Démo Notons A la matrice représentant F^N :

$$A_{kj} = e^{-2i\pi kj/N}.$$

Donc $A_{jk} = A_{kj}$

Lemme $\quad F^N \circ \overline{F^N} = \overline{F^N} \circ F^N = N\, Id.$

Démo Si on note à nouveau $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ la matrice représentant F^N dans la base canonique, l'énoncé revient à $A\bar{A} = \bar{A}A = N I_N$.

Posons $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{k=0}^{N-1} = F^N u$, pour $u \in \mathbb{C}^N$.

Calculons $\bar{A}\hat{u}$.

$$(\bar{A}\hat{u})_\ell = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{u}_j \, e^{+2i\pi \ell j/N} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2i\pi jk/N} \right) e^{2i\pi \ell j/N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} u_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(\ell-k)/N}$$

Or $$\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(\ell-k)/N} = \begin{cases} N \text{ si } N \text{ divise } \ell-k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \qquad (*)$$

En effet, $$\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(\ell-k)/N} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi(\ell-k)/N}\right)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} q^j \quad \text{avec} \quad q = e^{2i\pi(\ell-k)/N},$$

et $$\sum_{j=0}^{N-1} q^j = \begin{cases} N & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases},$$ ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(\ell-k)/N} = \begin{cases} N \text{ si } (\ell-k)/N \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{1-e^{2i\pi j(\ell-k)}}{1-e^{2i\pi(\ell-k)/N}} = 0 \quad \text{sinon}, \end{cases}$$

et enfin, pour $k, \ell \in \{0, \dots, N-1\}$, le seul cas où $(\ell-k)/N \in \mathbb{Z}$ est $k = \ell$. On a montré $(*)$

Finalement, $$(\bar{A}\,\hat{u})_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi j(\ell-k)/N}}_{N \text{ si } k=\ell,\ 0 \text{ sinon}}$$

$$= N u_\ell .$$

CQFD.

L'application F^N (ou sa matrice A) est donc inversible (et on connaît son inverse). Puisque $A = A^T$, on a $\overline{A^T} A = A^* A = N I_N$, donc $\frac{1}{\sqrt{N}} A$ est unitaire.

<u>Remarque</u> Historiquement, la transformation de Fourier discrète a précédé la définition des séries de Fourier, et la définition de $\hat{f}(k)$ comme $\int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi kx}\, dx$ s'est imposée comme une limite d'une formule des rectangles à gauche.

Fourier (et ses contemporains!) se demandait si l'on pouvait écrire « n'importe quelle » fonction f sous la forme $f(x) = \sum_k a_k e^{2i\pi kx}$. Il a commencé par étudier le cas où f est discrète : $f = (f_k)_{k=0}^{N-1}$ et a tenté d'écrire $f_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{2i\pi jk/N}$, pour $k = 0, \dots, N-1$, (qui est bien le pendant en dimension finie N de $f(x) = \sum_k a_k e^{2i\pi kx}$) avec une somme de N termes car c'est le seul moyen d'avoir une bijection $(f_k) \longleftrightarrow (a_j)$. Le lemme que nous venons de démontrer lui a indiqué que la solution $(a_j)_{j=0}^{N-1}$ était donnée par

$$a = \frac{1}{N}\bar{A}\, f, \quad a_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2i\pi kj/N}.$$

En faisant tendre N vers l'infini pour que le vecteur $(f_k)_{k=0}^{N-1}$ « devienne » la fonction f, il a remarqué que $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2i\pi kj/N}$ tendait vers $\int f(x) e^{-2i\pi jx}dx$ (somme de Riemann) qui est donc la définition de $\hat{f}(j)$.

Nous allons maintenant voir comment effectuer (de manière rapide, efficace) le <u>calcul</u> des coefficients $(F^N u)_k$.

(à suivre).

c) Transformée de Fourier rapide

Pour calculer la transformée de Fourier discrète d'un vecteur $u \in \mathbb{C}^N$ donné, il faut le multiplier par une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$: ceci demande <u>a priori</u> N^2 multiplications et $N(N-1)$ additions (complexes). Nous allons voir qu'en réalité, grâce à la structure particulière de la matrice impliquée (ses coefficients sont les $e^{-2i\pi kj/N}$), cette complexité peut être énormément réduite (pour devenir <u>presque</u> linéaire en N). L'idée de base est d'éviter de faire des calculs identiques plusieurs fois.

Commençons par observer la transformation avec $N=4$.
La matrice de la transformation, que l'on note ici $A_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, est

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$, ce qui permet de calculer $\hat{u} = A_4 u$:

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ \hat{u}_1 = u_0 - iu_1 - u_2 + iu_3 \\ \hat{u}_2 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \\ \hat{u}_3 = u_0 + iu_1 - u_2 - iu_3 \end{cases}$$

ce qui représente a priori 28 opérations sur des nombres complexes (en comptant les multiplications par 1 car la présence systématique de 1 n'est due qu'au fait que $N=4$).

Cependant on peut réécrire le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = \overset{3}{\boxed{u_0 + u_2}} \overset{1}{+} \overset{3}{\boxed{u_1 + u_3}} & \to 3+1+3 \text{ opérations} \\ \hat{u}_2 = u_0 + u_2 \overset{1}{-} (u_1 + u_3) & 1 \text{ opération} \\ \hat{u}_1 = \overset{3}{\boxed{u_0 - u_2}} \overset{1}{-} \overset{3}{\boxed{(iu_1 - iu_3)}} & 3+1+3 \text{ opérations} \\ \hat{u}_3 = u_0 - u_2 \underset{1}{+} (iu_1 - iu_3) & 1 \text{ opération} \end{cases}$$

En remarquant que l'on peut éviter de faire 2 fois le calcul de u_0+u_2, u_1+u_3, u_0-u_2 et $iu_1 - iu_3$, on peut économiser 12 opérations et calculer $\hat{u}$ en 16 opérations sur des complexes (en comptant les multiplications par 1). On peut aller plus loin sur cet exemple : en remarquant que A_2 (la matrice de la transformation de Fourier discrète en dimension 2) s'écrit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on peut réécrire le système :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} u_0 + u_2 \\ u_1 + u_3 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 + u_2 \\ u_1 + u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} u_0 - u_2 \\ -i(u_1 - u_3) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (TFR, ou FFT pour fast Fourier transform) généralise cette remarque dans le cas où $N = 2^n$.

Supposons que N est pair : $N = 2M$ pour $M \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathbb{C}^N$.

On s'intéresse à $\hat{u} = F^N u$.

- Pour les composantes d'indices pairs de $\hat{u}$ on peut écrire

$$\hat{u}_{2k} = \sum_{j=0}^{M-1} u_j e^{-4i\pi kj/N} + \sum_{j=M}^{N-1} u_j e^{-4i\pi kj/N}$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} u_j e^{-2i\pi kj/N} + \sum_{j=M}^{N-1} u_j e^{-2i\pi kj/M}.$$

Or $e^{-2i\pi kj/M} = e^{-2i\pi k(j+M)/M}$ $\forall j,k$. Donc

$$\hat{u}_{2k} = \sum_{j=0}^{M-1} (u_j + u_{j+M}) e^{-2i\pi kj/M} \quad \text{pour } k = 0, \dots, M-1.$$

Ceci s'écrit :

$$\left(\hat{u}_{2k}\right)_{k=0}^{M-1} = A_M \begin{pmatrix} u_0 + u_M \\ u_1 + u_{M+1} \\ \vdots \\ u_{M-1} + u_{N-1} \end{pmatrix}$$ où A_M est la matrice de F^M.

- Concernant les composantes d'indices impairs $(2k+1)$:

$$\hat{u}_{2k+1} = \sum_{j=0}^{M-1} u_j e^{-2i\pi kj/M} e^{-2i\pi j/N} + \sum_{j=M}^{N-1} u_j e^{-2i\pi kj/M} e^{-2i\pi j/N}.$$

Or $e^{-2i\pi kj/M} = e^{-2i\pi k(j+M)/M}$,

et $e^{-2i\pi j/N} = e^{-i\pi j/M} = -e^{-i\pi(j+M)/M}$ car $e^{-i} = -1$.

Donc $$\hat{u}_{2k+1} = \sum_{j=0}^{M-1} (u_j - u_{j+M}) e^{-2i\pi kj/M} e^{-i\pi j/M}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, M-1.$$

Ceci s'écrit :

$$\left(\hat{u}_{2k+1}\right)_{k=0}^{M-1} = A_M \begin{pmatrix} u_0 - u_M \\ e^{-i\pi/M}(u_1 - u_{M+1}) \\ \vdots \\ e^{-i(M-1)\pi/M}(u_{M-1} - u_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Notons $u_I = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M$ et $u_{II} = \begin{pmatrix} u_M \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M$.

Notons $\hat{u}_p = \left(\hat{u}_{2k}\right)_{k=0}^{M-1} \in \mathbb{C}^M$ et $\hat{u}_i = \left(\hat{u}_{2k+1}\right)_{k=0}^{M-1} \in \mathbb{C}^M$.

On a montré que $\begin{cases} \hat{u}_p = A_M(u_I + u_{II}) \\ \hat{u}_i = A_M D_M (u_I - u_{II}) \end{cases}$

où $D_M \in \mathcal{M}_M(\mathbb{C})$ est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux les $e^{-i\pi j/M}$: $(D_M)_{k,j} = e^{-i\pi j/M}\delta_{kj}$.

Ceci s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_M & 0 \\ \hline 0 & A_M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & D_M \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_I + u_{II} \\ u_I - u_{II} \end{pmatrix}.$$

$\hat{u}$ s'obtient bien sûr à partir de $\begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}$ par permutation :

si j est pair, $\hat{u}_j = \begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}_{j/2}$,

si j est impair, $\hat{u}_j = \begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}_{M + \frac{j-1}{2}}$.

Notons P_N la matrice de cette permutation. On a

$$\hat{u} = P_N \left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2}\end{array}\right)\begin{pmatrix} u_I + u_{II} \\ u_I - u_{II}\end{pmatrix} ;$$

comptons les opérations (sur nombres complexes) mises en jeu (on ne compte pas les permutations).

- Calcul de $\begin{pmatrix} u_I + u_{II} \\ u_I - u_{II}\end{pmatrix}$: N opérations.
- Multiplication par $\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2}\end{array}\right)$: $N/2$ opérations.
- Multiplication par $\left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2}\end{array}\right)$: $2 \times \left[\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\right] = N^2 - N$ opérations.

Au total ce calcul met en jeu $N^2 + \frac{N}{2}$ opérations, qu'il faut comparer aux $N^2 + N(N-1) = 2N^2 - N$ opérations réclamées par le calcul brut : on a presque (pour N grand) divisé par 2 le nombre d'opération grâce à cette astuce.

Remarquons que nous avons écrit $\hat{u} = P_N \left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & I_{N/2} \\ \hline I_{N/2} & -I_{N/2}\end{array}\right) u$,

soit
$$A_N = P_N \left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & I_{N/2} \\ \hline I_{N/2} & -I_{N/2}\end{array}\right) = P_N \left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & I_{N/2} \\ \hline D_{N/2} & -D_{N/2}\end{array}\right),$$
ceci sous la seule hypothèse que N est pair.

Si $\frac{N}{2}$ est pair lui aussi, on peut remplacer les $A_{N/2}$ de la même manière, et si $N = 2^n$ on peut effectuer cette opération astucieuse n fois. C'est l'algorithme de la transformation de Fourier rapide. Pour N grand, on divise par presque 2 le nombre d'opérations à effectuer à chaque étape, mais pas pour N petit...

Théorème

Si $N = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, l'algorithme de transformation de Fourier rapide permet de calculer la transformée de Fourier discrète de $u \in \mathbb{C}^N$ en un nombre d'opérations élémentaires (sur des nombres réels) inférieur à $5N\log_2(N)$.

Démonstration Une addition complexe représente 2 additions élémentaires, une multiplication complexe réclame 4 multiplications réelles et 2 additions réelles, soit 6 opérations élémentaires.

Notons α_n le nombre d'opérations élémentaires en jeu en dimension 2^n.

Le calcul de $\hat{u}$ par

$$\hat{u} = P_N \left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2} \end{array}\right)\begin{pmatrix} u_I + u_{II} \\ u_I - u_{II} \end{pmatrix}$$

demande : • $2N$ opérations <u>élémentaires</u> pour le calcul de $\begin{pmatrix} u_I + u_{II} \\ u_I - u_{II} \end{pmatrix}$,

• $6\frac{N}{2}$ opérations <u>élémentaires</u> pour la multiplication par $\left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & D_{N/2} \end{array}\right)$,

• $2\alpha_{n-1}$ opérations élémentaires pour la multiplication par $\left(\begin{array}{c|c} A_{N/2} & 0 \\ \hline 0 & A_{N/2} \end{array}\right)$,

donc $\quad \alpha_n = 2\alpha_{n-1} + 5N = 2\alpha_{n-1} + 5.2^n$.

- Pour $n=0$ $(N=1)$, le nombre d'opérations est 0.
- Supposons le résultat vrai pour tout $n \leq n_0$:

$$\alpha_n \leq 5N\log_2 N = 5n\,2^n \quad \text{si } n \leq n_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha_{n_0+1} &= 2\alpha_{n_0} + 5.\,2^{n_0+1} \\ &\leq 2 \times 5 n_0 2^{n_0} + 5.\,2^{n_0+1} \\ &= 5 n_0 2^{n_0+1} + 5.\,2^{n_0+1} \\ &= 5(n_0+1)\,2^{n_0+1} = 5.\,2^{n_0+1}\log_2\left(2^{n_0+1}\right). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

Remarques

- L'algorithme de TFR permet le calcul exact (et non approché) de la transformée de Fourier discrète d'un vecteur.

- La transformée de Fourier discrète inverse s'effectue de manière rapide avec le même algorithme en remplaçant D_N par $\overline{D_N}$.

- Si $N = 2^n$, la matrice de permutation globale de l'algorithme est

$$P = P_N \begin{pmatrix} P_{N/2} & 0 \\ 0 & P_{N/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{N/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{N/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{N/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{N/4} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} P_4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_2 \end{pmatrix}$$

(mais remarquer qu'en fait $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (exercice)).

On peut montrer que P est la matrice associée à la permutation σ (i.e. $P_{ij} = \delta_{i\,\sigma(j)}$) telle que pour $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ dont le développement en base 2 s'écrit $\overline{d_{n-1}\, d_{n-2} \dots d_0}$ où $d_i \in \{0,1\}$ $\forall i$ (i.e. $j = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\, 2^k$),

$$\sigma\left(\overline{d_{n-1} \dots d_0}\right) = \overline{d_0 \dots d_{n-1}}$$

(renversement du développement en base 2 de chaque indice).