Séance 1

# IV) Recherche de valeurs propres

Dans cette partie on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on s'intéresse au calcul approché de (certaines de) ses valeurs propres. Nous allons étudier :

- une méthode partielle qui permet de calculer une valeur propre particulière de $A$ et le vecteur propre correspondant ;
- une méthode globale qui permet de calculer toutes les valeurs propres de $A$ mais pas les vecteurs propres.

## A) Sensibilité d'un problème aux valeurs propres.

Soit $\varepsilon$ un « petit » réel.

Soit $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres ont toutes pour module $\varepsilon^{1/n}$.

Si $n$ est grand elles sont donc très éloignées de $0$, unique valeur propre de $A_0$.

Quantifions cet éloignement :

**Th** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $D_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ : $D = \mathrm{diag}((\lambda_i)_{i=1}^n)$.
Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que $\|\mathrm{diag}((\mu_i)_{i=1}^n)\| \leq \|\mu\|_\infty$ pour tout $\mu = (\mu_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. On a $\sigma(A+\delta A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$

où $D_i = \{ a \in \mathbb{C} \,/\, |a - \lambda_i| \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(P) \, \|\delta A\| \}$

pour toute matrice $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Rem** Toutes les normes subordonnées $|||\cdot|||_p$ vérifient $|||\mathrm{diag}(\mu_i)|||_p \leq \|\mu\|_\infty$.

**Démo** $a$ est valeur propre de $A+\delta A$ ssi $A+\delta A - aI$ n'est pas inversible,

i.e. ssi $P^{-1}(A+\delta A - aI)P$ n'est pas inversible,

i.e. ssi $D + P^{-1}\delta A P - aI$ n'est pas inversible

① Si $D-aI$ n'est pas inversible, $\exists i \mid a=\lambda_i$ donc $a \in D_i$.

② Si $D-aI$ est inversible, $a$ est valeur propre de $A+\delta A$ ssi

$$I + (D-aI)^{-1}P^{-1}\delta A P \text{ est non inversible},$$

ce qui implique que $\|(D-aI)^{-1}P^{-1}\delta A P\| \geqslant 1$

d'après un théorème démontré précédemment dans ce cours (car $\|\cdot\|$ est supposée matricielle). Or

$$\|(D-aI)^{-1}P^{-1}\delta A P\| \leqslant \|(D-aI)^{-1}\| \, \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(P)\,\|\delta A\| \leqslant \max_i \frac{1}{|\lambda_i - a|}\, \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(P)\|\delta A\|.$$

Donc $\max_i \frac{1}{|\lambda_i-a|}\,\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(P)\,\|\delta A\| \geqslant 1$ et $\min_i |\lambda_i - a| \leqslant \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(P)\|\delta A\|$. CQFD.

Remarquer que c'est le conditionnement de la matrice de passage qui a un rôle.

## B) Une méthode partielle : la méthode de la puissance

Cette méthode, dont le but est d'approcher le mode propre $(\lambda_1, x_1)$ de $A$ où $\lambda_1$ est la valeur propre de plus grand module, consiste en l'algorithme :

- soit $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n \mid \|q^{(0)}\|_2 = 1$
- définir les suites $(\lambda^{k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ et $(q^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^n$ par :

$$\begin{cases} z^{(k)} = A q^{(k-1)}, & k \geqslant 1 \\ q^{(k)} = \dfrac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2} \\ \lambda^{(k)} = q^{(k)*} A q^{(k)} \end{cases}$$

**Th** Si $A$ est diagonalisable, de modes propres $(\lambda_i, x_i)_{i=1}^{n}$ ordonnés de telle manière que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$, si $q^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec $a_1 \neq 0$, l'algorithme est bien défini et $\exists C \in \mathbb{R}$, $\exists (\eta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{C}$ avec $|\eta^{(k)}| = 1 \; \forall k$ tels que :

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \qquad \forall k$$

$$\|\eta^{(k)} q^{(k)} - \tilde{x}_1\|_2 \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

où $\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_2}$.

Rem Sous les hypothèses du théorème la méthode converge...

– Dans la démonstration on suppose que $\|x_1\|_2 = 1$ ($x_1 = \tilde{x}_1$).

Démo Remarquons une fois pour toutes que $\|q^{(k)}\|_2 = 1$. Ceci va nous permettre d'écrire $q^{(k)}$, combinaison linéaire de vecteurs, comme une certaine expression vectorielle divisée par la norme de cette expression, systématiquement. On a $q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}$. Puisque $q^{(0)} = \sum a_i x_i$ (cette expression en fonction des $x_i$ est possible pour tout $q^{(0)}$ puisque $A$ est diagonalisable),

$$q^{(k)} = \frac{\sum_i a_i \lambda_i^k x_i}{\|\sum_i a_i \lambda_i^k x_i\|_2} = \frac{\sum_i a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i}{\|\sum_i a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i\|_2}$$

$$= \frac{a_1 \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k x_1 + \sum_{i\geq 2} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i}{\|a_1 \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k x_1 + \sum_{i\geq 2} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i\|_2}$$

Notons $\varepsilon = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \in \mathbb{C}$. On a

$$\overline{\varepsilon^k}\, q^{(k)} = \frac{a_1 x_1 + \sum_{i\geq 2} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k \overline{\varepsilon^k} x_i}{\|a_1 x_1 + \sum_{i\geq 2} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k \overline{\varepsilon^k} x_i\|_2}.$$

Notons $\alpha = \frac{a_1}{|a_1|} \in \mathbb{C}$ ($a_1 \neq 0$). On a

$$\alpha \overline{\varepsilon^k}\, q^{(k)} = \frac{|a_1| x_1 + \sum_{i\geq 2} \overline{\varepsilon^k} \alpha a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i}{\||a_1| x_1 + \sum_{i\geq 2} \overline{\varepsilon^k} \alpha a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i\|_2}.$$

Notons $\eta^{(k)} = \alpha \overline{\varepsilon^k}$. On a $|\eta^k| = 1$ et

$$\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1 = \left(\frac{|a_1|}{\||a_1| x_1 + \sum_{i\geq 2} \eta^{(k)} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i\|_2} - 1\right) x_1 + \frac{\sum_{i\geq 2} \eta^{(k)} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i}{\||a_1| x_1 + \sum_{i\geq 2} \eta^{(k)} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i\|_2}$$

On va montrer que les deux termes du membre de droite sont petits...

Notons $\delta^{(k)} = \sum_{i \geqslant 2} \eta^{(k)} a_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_1|}\right)^k x_i$. Il existe $\tilde{C}$ / $\|\delta^{(k)}\|_2 \leq \tilde{C} \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$

(car $|\lambda_i| \geqslant |\lambda_2| \quad \forall\, i \geqslant 2$). D'autre part,

$$\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2 \geqslant \| |a_1| x_1 \|_2 - \| \delta^k \|_2 \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| |a_1| x_1 \|_2 \quad \text{pour } k \text{ assez grand, d'après}$$

Donc
$$\| \eta^{(k)} q^{(k)} - x_1 \|_2 = \left\| \left( \frac{|a_1|}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} - 1 \right) x_1 + \frac{\delta^{(k)}}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} \right\|_2$$

$$\leqslant \left| \frac{|a_1|}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} - 1 \right| + \frac{\| \delta^{(k)} \|_2}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2}$$

$$\leqslant \frac{\left| |a_1| - \| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2 \right|}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} + \frac{\| \delta^{(k)} \|_2}{\frac{1}{2} \| |a_1| x_1 \|_2} \quad \left(\text{noter que } \| |a_1| x_1 \|_2 = |a_1|\right)$$

$$\leqslant \frac{\| |a_1| x_1 - (|a_1| x_1 + \delta^{(k)}) \|_2}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} + \frac{2\tilde{C}}{|a_1|} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$$

$$\leqslant \frac{\| \delta^{(k)} \|_2}{\| |a_1| x_1 + \delta^{(k)} \|_2} + \frac{2\tilde{C}}{|a_1|} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \leqslant \frac{4\tilde{C}}{|a_1|} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^2.$$

Il suffit de poser $C = \frac{4\tilde{C}}{|a_1|}$ pour obtenir la deuxième inégalité énoncée.

Par ailleurs, $\lambda^{(k)} = q^{(k)*} A\, q^{(k)} = \left(\eta^{(k)} q^{(k)}\right)^* A \left(\eta^{(k)} q^{(k)}\right)$ car $|\eta^{(k)}| = 1$.

Donc $\lambda^{(k)} = \left(x_1 + \eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)^* A \left(x_1 + \eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)$

$$= x_1^* A x_1 + x_1^* A \left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right) + \left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)^* A\, x_1$$

$$= \lambda_1 + x_1^* A \left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right) + \left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)^* A\, x_1$$

et $\left|\lambda^{(k)} - \lambda_1\right| \leq \left|x_1^* A \left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)\right| + \left|\left(\eta^{(k)} q^{(k)} - x_1\right)^* A\, x_1\right|$

$\leq D \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ d'après ce qu'on a montré juste avant, pour un certain $D$.

Finalement, on a donc les 2 inégalités de l'énoncé avec

$$C = \max\left(D, \frac{4\tilde{C}}{|\alpha_1|}\right).$$

---

Question : quand arrêter l'algorithme ?

On peut stopper lorsque $\|q^{(k)} - q^{(k-1)}\|_2$ est inférieur à une tolérance donnée (ou $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|$ ...), mais un test plus fin consiste à évaluer $Aq^{(k)} - \lambda^{(k)} q^{(k)}$, que l'on note $r^{(k)}$ et que l'on appelle le résidu à l'étape $k$. D'après le théorème que nous venons de démontrer, $r^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (à vérifier à titre d'exercice). L'analyse qui suit permet, au moyen du résidu, de calculer une bonne estimation de l'erreur faite à chaque étape

(à suivre).