Cours pour remplacer celui du 20 novembre : lundi 25 janvier au matin.
Examen terminal (écrit) : lundi 22 février au matin (2h, 40% de la note)
Il y aura aussi 2 TP notés (30% de la note chacun).

La dernière fois :

**Th** On considère le pb de Cauchy
$$(C)\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = u^0(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
avec $f\in C^2(\mathbb{R})$, $u^0 \in C^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{0\prime}\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $T = \begin{cases} +\infty & \text{si } f''(u^0(x))u^{0\prime}(x) \geq 0\ \forall x \\ \dfrac{-1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)} & \text{sinon}\end{cases}$ (remarquer que $T>0$).

Alors (C) admet une unique solution de classe $C^1([0,T[\times\mathbb{R})$.

De plus :
- cette solution vérifie $u(t, x+tf'(u^0(x))) = u^0(x)\ \forall t<T$
- cette solution ne peut pas être prolongée en des temps supérieurs (en tant que solution de classe $C^1$) → mais on pourra la prolonger comme solution au sens des distributions

**Démo** : on a déjà montré que si $u$ est solution de classe $C^1$, on a :
$$u(t, x+tf'(u^0(x))) = u^0(x) \quad (= u(0,x)).$$
La question est : soit $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, que vaut $u(t,x)$ ?

→ existe-t-il $y\in\mathbb{R}$ / $y+tf'(u^0(y)) = x$ ? Si c'est le cas,
$$u(t,x) = u(t, y+tf'(u^0(y))) = u^0(y) \dots$$
Cette question est celle de l'inversibilité de $X_t : \begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ y\mapsto y+tf'(u^0(y))\end{cases}$

(jusqu'ici on avait noté $X_t(y) = X(t,y)$).

Remarquons que $X_t'(y) = 1+tf''(u^0(y))u^{0\prime}(y)$.
- Si $f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)\geq 0\ \forall x$, $X_t'(x)\geq 1\ \forall x$ et $X_t$ est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Sinon, nous allons voir que pour $t$ suffisamment petit $\left(t < \dfrac{-1}{\inf\limits_x f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)}\right)$, $X_t'$ est minoré par une constante $>0$ et $X_t$ sera ainsi bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Si $t < T = \dfrac{-1}{\inf\limits_x f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)}$, $\exists\varepsilon>0 / t\leq T-\varepsilon$.
$$X_t'(x) = 1+tf''(u^0(x))u^{0\prime}(x) \geq \begin{cases} 1 & \text{si } f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)\geq 0 \\ 1+(T-\varepsilon)f''(u^0(x))u^{0\prime}(x) & \text{sinon.}\end{cases}$$
$$X_t'(x) \geq \begin{cases} 1 & \text{si } f''(u^0(x))u^{0\prime}(x)\geq 0 \\ 1+\left(\dfrac{-1}{\inf\limits_y (f''(u^0(y)))u^{0\prime}(y)} - \varepsilon\right)f''(u^0(x))u^{0\prime}(x) & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$X_t'(x) \geqslant \begin{cases} 1 & \text{si } f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) \geqslant 0, \\ 1 + \left( \dfrac{-1 - \varepsilon \inf_y \left(f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y)\right)}{\inf_y \left(f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y)\right)} \right) f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) & \text{sinon}, \end{cases}$$

donc $$X_t'(x) \geqslant \begin{cases} 1 & \text{si} \dots \\ 1 + -1 - \varepsilon \inf_y f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y) & \text{si } \varepsilon \text{ est suffisamment petit pour que } -1 - \varepsilon \inf_y f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y) \leqslant 0 \end{cases}$$

soit $$X_t'(x) \geqslant \begin{cases} 1 & \text{si } f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) \geqslant 1 \\ -\varepsilon \inf_y f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y) > 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Ainsi $X_t$ est injective sur $\mathbb{R}$, et surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car $X_t(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$ ($X_t'$ étant minoré par une constante positive la constante étant $\min\left(1, -\varepsilon \inf_y f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y)\right)$.

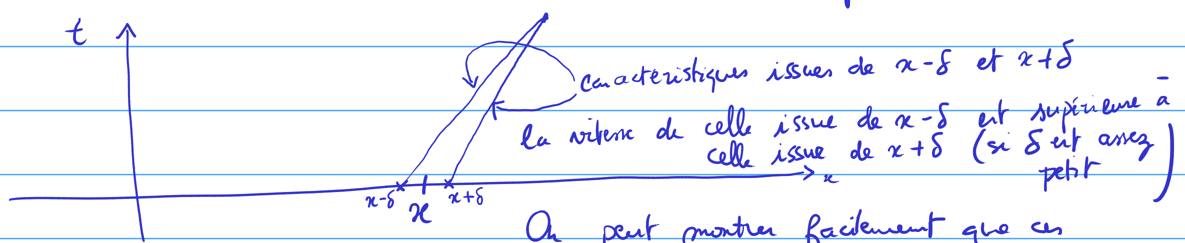
Il reste à démontrer l'existence d'une solution. Pour cela on procède comme dans le cas $\partial_t u + a(t,x)\, \partial_x u = 0$ (ici $a(t,x) = f'(u(t,x))$).

Cette solution ne peut pas être prolongée en temps supérieur : il y a (au moins) deux manières de le démontrer :

① montrer que $\|\partial_x u(t,\cdot)\|_\infty \xrightarrow[t \to T]{} \infty$ (par valeurs inférieures)

(cf. mes notes de cours en pdf).

② Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \,/\, f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) = \inf_y f''(u^0(y))\, u^{0\prime}(y) < 0$




On peut montrer facilement que ces 2 droites caractéristiques se croisent en un temps de l'ordre de $T$ (cf mes notes de cours).
(lorsque $\delta \to 0$, le tps du croisement tend vers $T$)

CQFD.

---

<u>Ex</u> • Si $f(u) = a u$ $(a \in \mathbb{R})$ : $f''(u) = 0$ donc $f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) = 0 \;\forall x$,

donc $T = +\infty$ : on récupère l'existence de la solution globale en temps, et $u(t, x + \underset{\substack{\uparrow \\ a = f'(u)}}{at}) = u^0(x)$

• Si $f(u) = \frac{u^2}{2}$ (éq. de Burgers), $f''(u^0(x))\, u^{0\prime}(x) = u^{0\prime}(x)$, donc $T = +\infty$ si et seulement si $u^{0\prime}(x) \geq 0 \ \forall x$.

Cette équation est importante car elle est le modèle d'équation de transport non linéaire. Remarquer que pour les solutions régulières (de classe $C^1$), elle est équivalente à $\partial_t u + u\, \partial_x u = 0$ : éq. de transport de la quantité $u$ à vitesse $u$.

• Un autre exemple célèbre est l'équation $\partial_t u + \partial_x \big(u(1-u)\big) = 0$.
C'est une équation du type « trafic routier ».

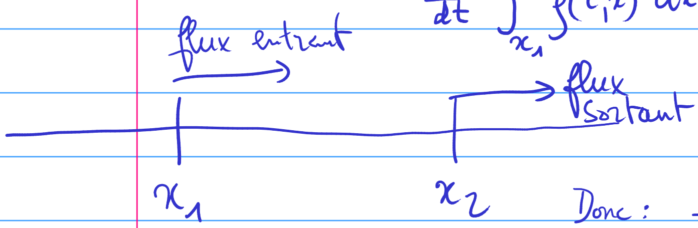
<u>Explication</u> : Considérons une autoroute rectiligne infinie, et notons $\rho(t,x)$ la densité linéique de voitures sur cette autoroute

( $\int_{x_1}^{x_2} \rho(t,x)\,dx$ est le « nombre » de voitures situées entre $x_1$ et $x_2$ au temps $t$... )

Les voitures ont chacune leur vitesse positive ou nulle, et on peut écrire qu'il existe une vitesse $a(t,x)$ : l'équation qui régit l'évolution de $\rho(t,x)$ est

$\partial_t \rho + \partial_x (a\rho) = 0$. En effet : soit $x_1$, soit $x_2 > x_1$ ($\in \mathbb{R}$).

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(t,x)\,dx = \underbrace{\rho(t,x_1)\, a(t,x_1)}_{\text{flux de voitures en } (t,x_1)} - \underbrace{\rho(t,x_2)\, a(t,x_2)}_{\text{flux en } (t,x_2)}$$



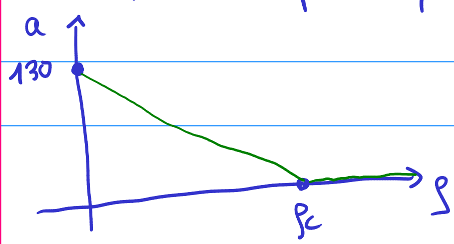

Donc : $\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(t,x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \partial_x(a\rho)\,(t,x)\,dx$.

Ceci se réécrit $\int_{x_1}^{x_2} \big[\partial_t \rho(t,x) + \partial_x(a\rho)(t,x)\big]\,dx = 0$. Comme cette égalité est vraie pour tous $x_1$ et $x_2$, on $\partial_t \rho + \partial_x a\rho = 0$.

Dans la réalité, $a$ dépend de $\rho$ : si les automobilistes sont disciplinés et raisonnables, $a$ est une fonction décroissante de $\rho$. Par exemple (toujours s'ils sont disciplinés), $a(0) = 130$ (en $km.h^{-1}$), par ailleurs il existe une densité critique $\rho_c$ telle que $a(\rho_c) = 0$ (et $a(\rho) = 0 \ \forall \rho \geq \rho_c$).

La manière la plus simple de terminer la modélisation est de supposer $a$ affine :

$$a(\rho) = \left(130 - \rho\, \frac{130}{\rho_c}\right)^+ = \left(130\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)\right)^+$$



L'équation sur $\rho$ devient $\partial_t \rho + \partial_x \left[ 130\, \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)^+ \right] = 0$.

Par ailleurs on peut montrer que si $\rho(0,\cdot) \in [0, \rho_c]$, la solution reste dans cet intervalle (on l'a montré dans le cas des solutions régulières, puisque $\rho$ est transporté le long de courbes caractéristiques). Donc on peut remplacer notre EDP par $\partial_t \rho + \partial_x \left(130\, \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)\right) = 0$ (on a ôté la partie positive).

En remplaçant 130 par 1 et $\rho_c$ par 1,

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho(1-\rho)\right) = 0.$$

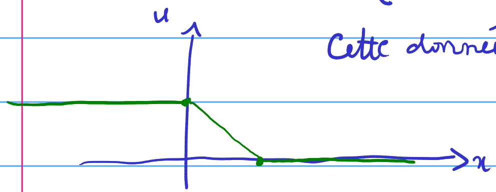
Ce modèle permet de prévoir l'évolution du trafic de manière assez bonne.

---

Donc (cf. le dernier théorème) : les solutions de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ ne sont pas globales en tps positif.

Exemple d'apparition d'une discontinuité :

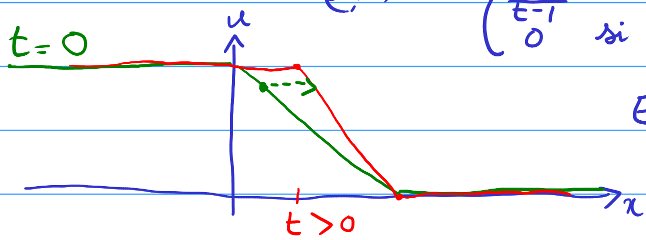
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \quad \text{(Burgers)} \\ u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$




Cette donnée est presque de classe $C^1$...
On va faire comme si le théorème et la méthode des caractéristiques étaient applicables.

La solution est donnée, pour $t < 1$, par

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t \\ \frac{x-1}{t-1} & \text{si } x \in [t,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$




En effet, la valeur $u = 1 - x_0$ (pour $x_0 \in [0,1[$) est propagée à la vitesse caractéristique $u = (1-x_0)$.

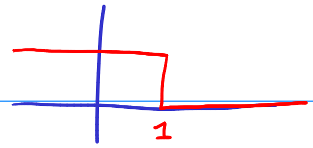
C'est la raison pour laquelle le profil de $u(t,\cdot)$ reste affine par morceaux. Autre manière de montrer que c'est « solution »

- pour $x < t$, $\partial_t u = 0$ et $\partial_x \frac{u^2}{2} = 0$ donc $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$
- pour $x > 1$, idem
- pour $x \in ]t,1[$, $\partial_t u = -\frac{(x-1)}{(t-1)^2}$ et $\frac{u^2}{2}(t,x) = \frac{(x-1)^2}{2(t-1)^2}$ donc

$$\partial_x \frac{u^2}{2} = \frac{x-1}{(t-1)^2} \text{ : on a bien } \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$$

Donc $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$ p.p., et comme $u$ est continue, OK...

Conclusion : $u(t,x) \xrightarrow[t \to 1]{} 1 - H_0(x-1)$
(par valeurs inférieures)




où $H_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$
(fonction de Heaviside).

En temps fini (ici 1), la solution est discontinue.

Que se passe-t-il après ? On se pose cette question parce que les équations non linéaires $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ (ici $f(u) = \frac{u^2}{2}$) paraissent être de bons modèles de phénomènes physiques.

<u>Idée</u> : les solutions faibles.

Si $u$ est solution régulière (classique) de $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$,

si $\varphi$ est une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}_+} \varphi\, \partial_t u + \varphi\, \partial_x f(u)\, dt\, dx = 0, \text{ donc}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left( -\varphi(0,x) u(0,x) - \int_{\mathbb{R}_+} u\, \partial_t \varphi\, dt \right) dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} - f(u)\, \partial_x \varphi\, dx\, dt = 0,$$

soit $$\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}_+} u\, \partial_t \varphi + f(u)\, \partial_x \varphi\, dt\, dx = - \int_{\mathbb{R}} u^0(x) \varphi(0,x)\, dx.$$

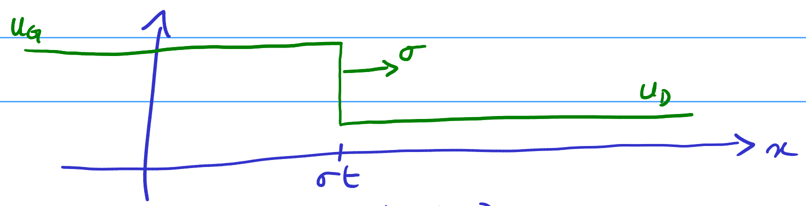
On remarque que équation a un sens dès que $u \in L^1_{loc}$ et $f(u) \in L^1_{loc}$.
Par exemple, $u \in L^\infty$ suffit (on n'a pas besoin de régularité de $u$ !).

<u>Déf</u> On dit que $u$ est solution faible de $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$
(ou solution au sens des distributions)

si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u$ vérifie : $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\iint_{\mathbb{R}_+\,\mathbb{R}} u\, \partial_t \varphi + f(u)\, \partial_x \varphi\, dx\, dt = - \int_{\mathbb{R}} u^0(x) \varphi(0,x)\, dx.$$

Cette définition est utile car elle permet de prendre en compte beaucoup plus de solutions !
Par exemple, elle permet de définir des solutions discontinues (en translation).
En effet : cherchons une solution de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ (sans condition initiale)
sous la forme $u(t,x) = \begin{cases} u_G & \text{si } x < \sigma t \\ u_D & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$ $(\sigma \in \mathbb{R})$ $u_G, u_D$ réels.




(remarquer qu'alors $u(0,x) = \begin{cases} u_G & \text{si } x < 0 \\ u_D & \text{si } x > 0 \end{cases}$).

u s'écrit $u(t,x) = u_G + (u_D - u_G)\, H_0(x - \sigma t)$. $\quad \left( H_0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \right)$.

On voudrait que u soit solution faible (au sens des distributions) de

$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, c'est-à-dire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ (\mathcal{D}')$ ← espace des distributions

Calculons $\partial_t u + \partial_x f(u)$ dans $\mathcal{D}'$ pour $u = u_G + (u_D - u_G) H_0(x - \sigma t)$ :

- $\partial_t u = 0 + (u_D - u_G)\, H_0'(x - \sigma t) \times (-\sigma)$

  $= -\sigma (u_D - u_G)\, \delta_0(x - \sigma t)$ $\quad$ ($\delta_0$ : masse de Dirac en 0).

- $\partial_x f(u)$ ? $\quad f(u) = f(u_G) + \big(f(u_D) - f(u_G)\big) H_0(x - \sigma t)$

  donc $\partial_x f(u) = 0 + \big(f(u_D) - f(u_G)\big) H_0'(x - \sigma t)$

  $= \big(f(u_D) - f(u_G)\big)\, \delta_0(x - \sigma t)$.

Ainsi $\partial_t u + \partial_x f(u) = \big[ -\sigma (u_D - u_G) + f(u_D) - f(u_G) \big]\, \delta_0(x - \sigma t) \in \mathcal{D}'$.

Demander que $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ (\mathcal{D}')$, c'est demander que

$-\sigma (u_D - u_G) + f(u_D) - f(u_G) = 0$, soit, si $u_G \neq u_D$

(si $u_G = u_D$, ce n'est pas drôle),

$$\boxed{\sigma = \frac{f(u_D) - f(u_G)}{u_D - u_G}.}$$

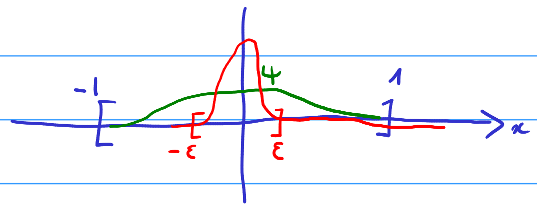
<u>Rappel</u> $\mathcal{D}'$ est le dual de $\mathcal{D} = C_c^\infty$.

$\delta_0$ est l'élément de $\mathcal{D}'$ t.q. $\delta_0(\varphi) \overset{\text{noté}}{=} \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_{-1}^{1} \psi = 1$.

Posons $\psi^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ (si $\psi$ est $C^\infty$, $(\psi^\varepsilon)_\varepsilon$ est un noyau régularisant).

$\mathrm{supp}(\psi^\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$




On a $\int_{\mathbb{R}} \psi^\varepsilon = 1 \quad \forall \varepsilon$

On peut montrer que $\psi^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$.

<u>Prop</u> $u(t,x) = \begin{cases} u_G & \text{si } x < \sigma t \\ u_D & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$ est solution de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ (\mathcal{D}')$

si et seulement si $\sigma = \dfrac{f(u_D) - f(u_G)}{u_D - u_G}$ $\quad$ (sous-entendu : $u_G \neq u_D$).

La relation $\sigma (u_D - u_G) = f(u_D) - f(u_G)$ est appelée relation de Rankine-Hugoniot.

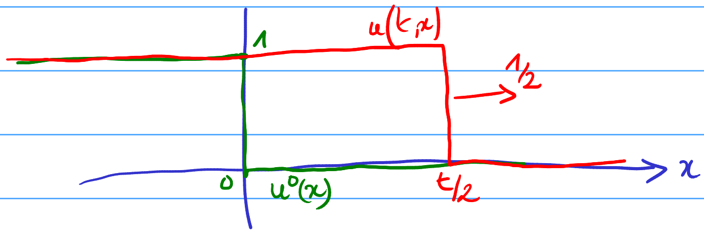
$\sigma$ est une vitesse de translation, ou de transport, de la discontinuité.

Exemples

① $f(u) = au$ $(a \in \mathbb{R})$ : $\sigma = \dfrac{a u_D - a u_G}{u_D - u_G} = a$ : pour l'équation de transport à vitesse constante, la vitesse est la vitesse de translation des discontinuités (c'est très naturel !).

② $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ (Burgers) : $\sigma = \dfrac{\frac{u_D^2}{2} - \frac{u_G^2}{2}}{u_D - u_G} = \dfrac{(u_D - u_G)(u_D + u_G)}{2(u_D - u_G)}$
$= \dfrac{u_G + u_D}{2}$.

Par exemple,
$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}t \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$ est solution faible de l'éq. de Burgers.




<u>Remarque importante</u> Attention aux <u>solutions faibles</u>.

Considérons $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$ et la donnée initiale $u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{t}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est solution faible.

faux pour des solutions non régulières

Par ailleurs $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \iff \partial_t u + u\,\partial_x u = 0$
$\iff u\,\partial_t u + u^2 \partial_x u = 0$

faux pour des solutions non régulières

$\iff \partial_t \frac{u^2}{2} + \partial_x \frac{u^3}{3} = 0$

Posons $v = \frac{u^2}{2}$. On a ($u \geq 0$ partout...) $\dfrac{u^3}{3} = \dfrac{(u^2)^{3/2}}{3} = \dfrac{(2v)^{3/2}}{3}$
$= \dfrac{2^{3/2}}{3} v^{3/2}$.

Donc $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \iff \partial_t v + \frac{2^{3/2}}{3} \partial_x v^{3/2} = 0$ et $v = \frac{u^2}{2}$.

Pour la donnée initiale que l'on considère,
$$v^0(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La relation de Rankine-Hugoniot donne
$$\sigma = \frac{f(v_D) - f(v_G)}{v_D - v_G} \quad \text{avec} \quad f(v) = \frac{2^{3/2}}{3} v^{3/2},$$

soit $\sigma = \dfrac{2^{3/2}}{3} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \dfrac{2^{5/2}}{3} \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{2}{3}$.

$\sigma = \frac{2}{3}$ pour $v$ mais $\sigma = \frac{1}{2}$ pour $u$.

C'est incohérent ! Explication : cf. ce qui en <u>rouge</u>.