Cours du 15 janvier 2021

La semaine dernière nous avons obtenu (par modélisation mathématiques) un modèle régissant le comportement d'un fluide dit parfait :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0 & \in \mathbb{R} \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p = f & \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (d = 1, 2 \text{ ou } 3)$$

Si le fluide est compressible barotrope, $p = p(\rho)$ (fonction donnée).

En dimension $d=1$: $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = f \end{cases}$

Ce système peut se mettre sous la forme

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \qquad (\text{si } f = 0, \text{ ce qu'on suppose ici})$$

avec $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$ et $F(U) = F\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p(\rho) \end{pmatrix}$.

$\mathcal{H}$ est dit hyperbolique si $\nabla F(U)$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Calculons $\nabla F\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} F_1(U) & \frac{\partial}{\partial u_2} F_1(U) \\ \frac{\partial}{\partial u_1} F_2(U) & \frac{\partial}{\partial u_2} F_2(U) \end{pmatrix}$.

Réécrivons U et F : $U = \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix}$, alors $F(U) = F\begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix}$.

Alors on peut calculer ∇F : $\nabla F\begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{\rho^2} + p'(\rho) & \frac{2q}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + p'(\rho) & 2u \end{pmatrix}$.

Calculons les valeurs propres de ∇F : on cherche λ tel que

$$-\lambda(2u - \lambda) + u^2 - p'(\rho) = 0, \quad \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - p'(\rho) = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 4u^2 - 4u^2 + 4p'(\rho) = 4\,p'(\rho)$, donc

$$\lambda = \frac{2u \pm 2\sqrt{p'(\rho)}}{2} = u \pm \sqrt{p'(\rho)} \in \mathbb{R} \text{ si } p'(\rho) \geq 0.$$

Si $p'(\rho) > 0$, il y a 2 valeurs propres réelles distinctes donc ∇F est $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Remarquer que l'hypothèse $p'(\rho) > 0$ est très naturelle (la pression est une fonction croissante de la densité).

Remarque (relative au TP du 8/01) : les éq. de Saint-Venant sont

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

, donc ce sont aussi celles de la dynamique des gaz compressibles barotropes avec $p(\rho) = g\frac{\rho^2}{2}$: les éq. de S-V sont donc un système hyperbolique pour $h > 0$.

Il existe un autre moyen de « fermer » le système
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 0 \end{cases}$$
que d'écrire $p = p(\rho)$: c'est de considérer (au contraire) que le fluide est incompressible.

Le fluide est dit incompressible si les volumes matériels sont de volume constant en temps. Ceci s'écrit :
$$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} 1\,dx = 0 \qquad \text{pour tout volume matériel } \omega(t).$$

Par ailleurs on sait que $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} 1\,dx \overset{(\text{Reynolds})}{=} \int_{\omega(t)} \frac{d}{dt}1\,dx + \int_{\partial\omega(t)} 1\; u\cdot n$
$$= 0 + \int_{\partial\omega(t)} u\cdot n \overset{(\text{Green})}{=} \int_{\omega(t)} \nabla\cdot u .$$

Donc $\displaystyle\int_{\omega(t)} \nabla\cdot u = 0$, et ceci étant vrai pour tout $\omega(t)$, $\nabla\cdot u = 0$.

Les équations d'Euler de la dynamique des fluides incompressibles sont
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p = 0 \quad (\text{ou } f) \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}$$

Remarque (valable pour un fluide compressible ou incompressible).

le système $\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p = 0 \end{cases}$

peut se réécrire, si ρ et u sont réguliers,
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0 \\ \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = 0 \end{cases}$$
où l'opérateur $u\cdot\nabla$ est défini par
$$(u\cdot\nabla v)_i = \sum_j u_j\,\partial_j v_i .$$

En effet la seconde équation s'écrit
$$u\,\partial_t\rho + \rho\,\partial_t u + (\nabla\cdot(\rho u))\,u + (\nabla u)\rho u + \nabla p = 0$$
où $(\nabla u)\,u$ est le produit matrice-vecteur de ∇u par ρu (à vérifier).

Or $(\nabla u)\,\rho u = \rho\,(\nabla u)\,u = \rho\, u\cdot\nabla u$ pour l'opérateur $u\cdot\nabla$ défini ci-dessus.

D'autre part, $u\partial_t\rho + (\nabla\cdot\rho u)u = u(\partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u) = 0$
d'après la première équation du système.

Finalement $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = 0$ CQFD. (Fin de la remarque).

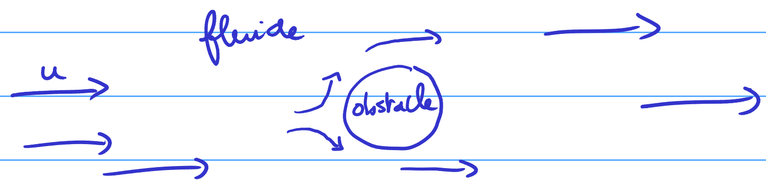
Autre remarque : $\partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u = \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot u$
$= \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho$ si le fluide est incompressible.

Attention : dans un fluide incompressible, la densité n'est pas forcément constante. Mais si elle l'est à $t=0$, elle le reste ultérieurement.

(L'éq. $\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0$ se résout avec la méthode des caractéristiques).

Paradoxe de d'Alembert

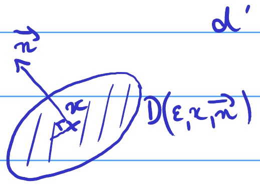
On peut montrer mathématiquement que dans un fluide parfait incompressible, un objet ne subit aucune force de la part de ce fluide (en régime stationnaire).



Ceci est contredit par les expériences.
Donc le modèle des fluides parfaits n'est pas parfait !

IV FLUIDES VISQUEUX (NEWTONIENS)

Définition Soit x un point dans le fluide, soit $\vec{n}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^d$), soit $\varepsilon > 0$. On note $D(\varepsilon, x, \vec{n})$ le disque centré en x, orthogonal à $\vec{n}$, d'aire ε.



Notons $F(\varepsilon, x, \vec{n})$ la force exercée par le fluide situé du côté où pointe $\vec{n}$ sur le disque.

Supposons que $\dfrac{F(\varepsilon, x, \vec{n})}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F(x, \vec{n}) \in \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$)

et que l'application qui à $\vec{n}$ associe $F(x, \vec{n})$ soit linéaire :

$\exists\ \sigma(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) t.q. $F(x, \vec{n}) = \sigma(x)\,\vec{n}$.

Alors $\sigma(x)$ est appelé <u>tenseur des contraintes</u> du fluide en x.

Ex Un fluide parfait admet un tenseur des contraintes :

$$\sigma = -p\,I \qquad \text{où } p \text{ est la pression}$$

$$(\sigma \vec{n} = F = -p\vec{n}).$$

Lemme Dans un fluide (de densité ρ, de vitesse u) qui admet un tenseur des contraintes σ, on a (en admettant les principes fondamentaux habituels)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u - \nabla \cdot \sigma = f \end{cases}$$

(densité volumique de force extérieure, par exemple $f = \rho g$)

(à démontrer en exercice).

Intéressons-nous maintenant à la forme que peut prendre σ.

Soit x_0 un point du fluide, et soient e_1, e_2, e_3 3 vecteurs de norme ε formant un repère orthogonal. Notons $e_1 = x_1 - x_0$, $e_2 = x_2 - x_0$, $e_3 = x_3 - x_0$.

Notons $x_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ les points transportés par le fluide :

$$\begin{cases} x_i'(t) = u(t, x_i(t)), \\ x_i(0) = x_i \end{cases}.$$

On a pour $t = h$ (petit) :

$$x_0(h) = x_0(0) + h\, u(0, x_0(0)) + o(h) = x_0 + h\, u(0, x_0) + o(h),$$

et, pour $i = 1, 2$ ou 3,

$$\begin{aligned} x_i(h) &= x_i(0) + h\, u(0, x_i(0)) + o(h) \\ &= x_i(0) + h\, u(0, x_0(0) + e_i) + o(h) \\ &= x_i(0) + h\, u(0, x_0(0)) + h\, \underbrace{\nabla u(0, x_0(0))\, e_i}_{\text{produit matrice-vecteur}} + o(\|e_i\|) + o(h) \\ &= x_i + h\, u(0, x_0) + h \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(\|e_i\|) + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e_i(h) &= x_i(h) - x_0(h) \\ &= e_i + h \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(h) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\left(e_i'(0) = \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(\varepsilon) \right).$$

La variation du vecteur e_i s'écrit en fonction du gradient du champ u.

Écrivons $\nabla u = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)}_{\text{partie symétrique de } \nabla u} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u - {}^t\nabla u)}_{\text{partie antisymétrique de } \nabla u}$.

Or $\frac{1}{2}(\nabla u - {}^t\nabla u) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u = \frac{1}{2} \nabla \wedge u$

$\left(\text{rappel : } \nabla \wedge u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{« } \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ »} \right) \right).$

Pour tout vecteur v, on a donc

$\frac{1}{2}(\nabla u - {}^t\nabla u) v = \begin{pmatrix} -\omega_3 v_2 + \omega_2 v_3 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ -\omega_2 v_1 + \omega_1 v_2 \end{pmatrix} = \omega \wedge v$: ceci exprime

que $\frac{1}{2}(\nabla u - {}^t\nabla u) v$ est une rotation de v d'axe ω.

Donc :

$$\begin{aligned} e_i(h) &= e_i + h \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(h) + o(\varepsilon) \\ &= e_i + \frac{h}{2}\left(\nabla u(0, x_0) + {}^t\nabla u(0, x_0)\right) e_i + \frac{h}{2}\left(\nabla u(0, x_0) - {}^t\nabla u(0, x_0)\right) e_i \\ &\quad + o(h) + o(\varepsilon) \\ &= e_i + \frac{h}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u) e_i + h\, \omega \wedge e_i + o(h) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Par ailleurs : $\frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ est symétrique, donc $\mathbb{R}$-diagonalisable en base orthonormée : ses vecteurs propres sont orthogonaux. Choisissons e_1, e_2, e_3 égaux à ces trois vecteurs propres. Ainsi

$e_i(h) = e_i + h \lambda_i e_i + h\, \omega \wedge e_i + o(h) + o(\varepsilon)$ où λ_i est valeur propre de $\frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ associée à e_i.

La partie symétrique de ∇u correspond à une dilatation et la partie antisymétrique à une rotation.

Définition $\frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2} \overset{\text{déf}}{=} D(u)$ est appelé tenseur des taux de déformation dans le fluide.

Définition On dit qu'un fluide incompressible est <u>newtonien</u> s'il admet un tenseur des contraintes qui s'écrit

$$\sigma = 2\mu\, D(u) - pI \qquad \text{pour } \mu \in \mathbb{R}_+^*.$$

Remarques ① Il paraît raisonnable que le tenseur des contraintes
- dépende de ∇u car c'est ∇u qui détermine les déformations dans le fluide
- ne dépende que de $\frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2}$ car $\frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2}$ ne crée que des rotations.

Le tenseur σ est là pour tenir compte de frottements internes au fluide.

② Pour un fluide compressible, c'est plus compliqué.

Lemme Dans un fluide incompressible newtonien (visqueux) on a

$$(1) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 2\mu\, \nabla\cdot D(u) + f \\ \nabla\cdot u = 0, \end{cases}$$

(équations de Navier-Stokes pour la dynamique des fluides incompressibles newtoniens)

qui s'écrit aussi

$$(2) \begin{cases} \partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \\ \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = \mu\Delta u + f \end{cases}$$

Démo (1) OK car $\sigma = 2\mu D(u) - pI$.

(2) • OK pour la première équation
• On a déjà vu que $\partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u = \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u)$.
Il reste à montrer que $2\mu \nabla\cdot D(u) = \mu\Delta u$.

$$(\nabla\cdot D(u))_i = \sum_j \partial_j (Du)_{ij} = \sum_j \partial_j\left(\frac{\partial_j u_i + \partial_i u_j}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j \partial^2_{jj} u_i + \frac{1}{2}\sum_j \partial_j \partial_i u_j$$

$$= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\sum_j \partial_i \partial_j u_j$$

$$= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\partial_i \sum_j \partial_j u_j$$

$$= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\partial_i (\nabla\cdot u)$$

Or $\nabla\cdot u = 0$ (partout) donc $\partial_i \nabla\cdot u = 0$

Donc $(\nabla\cdot D(u))_i = \frac{1}{2}\Delta u_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Donc $\nabla\cdot D(u) = \frac{1}{2}\Delta u$ et $2\mu\,\nabla\cdot D(u) = \mu\Delta u$.

CQFD.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles (le système ci-dessus) sont très complexes mathématiquement.

Nous allons nous pencher sur un régime particulier d'écoulement de Navier-Stokes : le régime de Stokes.

Supposons que $\rho(t=0,x) = \rho$. Alors, comme $\partial_t\rho + u\nabla\rho = 0$, ρ est constant sur les caractéristiques :

$$\rho(t,x) = \rho(0, X(0,t,x)) = \rho \quad : \rho \text{ est constant}$$

(on dit que le fluide est homogène).

Dans l'équation qui provient du principe fondamental de la dynamique,

$$\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = \mu\Delta u + f,$$

supposons que le terme $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u)$ est négligeable : ceci revient à négliger les termes d'inertie.

Alors on aboutit au système

Stokes $\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \leftarrow \text{traduit l'équilibre instantané des forces (extérieure, de pression, de viscosité)} \\ \nabla\cdot u = 0 & \leftarrow \text{traduit l'incompressibilité} \end{cases}$

Remarque le système de Stokes n'est pas forcément stationnaire !

En effet, on peut avoir une force extérieure dépendant du temps ou faire varier le domaine dans lequel se trouve le fluide (par exemple en faisant bouger un obstacle (solide) dans le fluide).

Formulation faible du système de Stokes

Considérons le pb
$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ ouvert borné régulier} \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La formulation faible de ce problème est :

$H^1_0(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) / \nabla v \in L^2(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d \text{ tel que} \\ \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u : \nabla v - p \nabla\cdot v = \int f\cdot v \quad \forall v \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d \\ \qquad \text{pour } p \in L^2(\Omega) \text{ à moyenne nulle} \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \end{array}}$$

où, pour 2 matrices A et B, $A : B = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}$.

Idée : si $-\mu \Delta u + \nabla p = f$,
$$-\mu \Delta u\cdot v + \nabla p \cdot v = f \cdot v \quad \forall v.$$

Donc $\displaystyle\int_\Omega \left(-\mu \Delta u \cdot v + \nabla p \cdot v\right) = \int_\Omega f \cdot v$, soit (formules de Green),

si $v \in \left(H^1(\Omega)\right)^d$,
$$\int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v - \int_{\partial\Omega} \mu (v\cdot\nabla u)\cdot n + \int_\Omega -p \nabla\cdot v + \int_{\partial\Omega} p\, v\cdot n = \int_\Omega f\cdot v$$

$v\cdot \nabla u = (\nabla u) v$ (produit matrice-vecteur).

Si $v \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d$, $v = 0$ sur $\partial\Omega$, ceci se résume à
$$\mu \int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \nabla\cdot v = \int_\Omega f\cdot v.$$

Une autre formulation faible est :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d \text{ et } p \in L^2(\Omega) \text{ à moyenne nulle tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\nabla u : \nabla v - p \nabla\cdot v\right) = \int_\Omega f\cdot v \qquad \forall v \in \left(H^1_0(\Omega)\right)^d \\ \displaystyle\int_\Omega q \nabla\cdot u = 0 \qquad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ à moyenne nulle.} \end{array}}$$

On peut montrer que le système de Stokes est bien posé (sous des hypothèses sur f et sur Ω) si $\mu > 0$.

Fin !

Pour (ré)viser les formulations faibles dans un contexte plus simple, voir mes notes de cours d'EDP (page perso) à partir de la page 137 (les formulations faibles apparaissent p. 144).