Cours du 2 décembre 2020

La semaine nous avons obtenu le modèle des équations d'Euler de la dynamique des fluides compressibles barotropes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 & \text{(conservation de la masse)} \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) = 0 & (\text{ou } f) \quad \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(Loi de Newton ou « conservation de la quantité de mouvement »).

On a montré que, sous l'hyp. $p'(\rho) > 0$, le système était hyperbolique en dimension 1 $(d=1)$.

Remarque : on dit que le système en dimension spatiale d

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_{x_j} u = 0$$ est hyperbolique si, pour tout

$\omega \in S^{d-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^d / \sum_{j=1}^{d} \omega_j^2 = 1\}$, $A_\omega = \sum_{j=1}^{d} \omega_j A_j$ est

$\mathbb{R}$-diagonalisable. Ceci revient à dire que le système est hyperbolique (au sens monodimensionnel) dans chaque direction (ω) :

si $u(t,x) = \overline{u}(t, \underbrace{x \cdot \omega}_{\text{scalaire } \in \mathbb{R}})$, $\partial_{x_j} u = \omega_j \partial_2 \overline{u}(t, \omega \cdot x)$, donc

$$\partial_t u + \sum_j A_j \partial_{x_j} u = \partial_t \overline{u} + \underbrace{\left(\sum_j \omega_j A_j\right)}_{A_\omega} \partial_2 \overline{u} = 0$$

Le système des équations d'Euler « compressibles barotropes » est hyperbolique (en dimension d) si $p'(\rho) > 0$.

Remarque : pourquoi cette notion d'hyperbolicité est-elle importante (en dimension 1) ?

Considérons le système $\partial_t u + A\,\partial_x u = 0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

① Si le système est hyperbolique : $\exists P$ inversible $/ A = PDP^{-1}$ est D est diagonale, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\partial_t u + A\,\partial_x u = 0 \Rightarrow P^{-1}\partial_t u + P^{-1}A\,\partial_x u = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t P^{-1}u + P^{-1}APP^{-1}\partial_x u = 0 \Rightarrow \partial_t P^{-1}u + D\,\partial_x P^{-1}u = 0, \text{ soit}$$

$$\partial_t (P^{-1}u)_i + D_{ii}\,\partial_x (P^{-1}u)_i = 0 \quad , i = 1, \dots, n. \quad \text{Donc}$$

$$(P^{-1}u)_i(t,x) = (P^{-1}u)_i\,(0, x - D_{ii}t)$$: la solution du pb de Cauchy est connue.

② Si A n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable, tout se passe mal !

Ou bien A a une valeur propre complexe, ou bien A n'est pas diagonalisable.

ⓐ Si A admet $\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ valeur propre : $\exists\, q \neq 0$ t.q. $Aq = \lambda q$.

Posons $u(0,x) = q e^{-ikx}$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$ ($u(0,x)$ donnée du pb de Cauchy). Alors $u(t,x) = q e^{i(\omega t - kx)}$ avec $\omega = \lambda k$ est solution :

$$\partial_t u = i\omega u \text{ et } \partial_x u = -iku, \text{ donc}$$

$$\partial_t u + A\,\partial_x u = i\omega u - ikAu = i\omega u - ike^{i(\omega t - kx)}Aq$$
$$= i\omega u - ik\lambda\, e^{i(\omega t - kx)} q$$
$$= i\omega u - ik\lambda u = 0 \text{ si } \omega = \lambda k.$$

Cette solution se réécrit $u(t,x) = q e^{-bkt} e^{i(akt - kx)}$.

Supposons (on fait ce choix !) que $kb < 0$ et très grand (!).

L'amplitude de $u(0,\cdot)$ est $|q|$ (mais $u(0,\cdot)$ oscille très vite) mais celle de $u(t,\cdot)$ est très grande pour $t > 0$.

Caractère mal posé du pb de Cauchy.

ⓑ Si A n'est pas diagonalisable ... Ex : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ($n = 2$, bloc de Jordan),

$$\begin{cases} \partial_t u + \lambda\,\partial_x u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + 0\,\partial_x u + \lambda\,\partial_x v = 0 \end{cases} \rightsquigarrow v(t,x) = v(0, x - \lambda t)$$

et $\partial_t u + \lambda\,\partial_x u = \underbrace{-\partial_x v}_{\text{terme source}}$ connu

$$\rightsquigarrow u(t,x) = u(0, x - \lambda t) - t\,\partial_x v\,(0, x - \lambda t)$$

Perte de régularité : u a un cran de moins de régularité que $v(0,\cdot)$... Caractère pas très bien posé.

Cf. éq. des gaz SANS PRESSION : $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x \rho u^2 = 0 \end{cases}$ (Euler avec $P(\rho) = 0$)

Exo : montrer que ce n'est pas hyperbolique, au sens de ⓑ.

Dans les solutions des pb de Cauchy associés à ce système des gaz sans pression apparaissent de manière générique des masses de Dirac.

Remarque J'ai écrit qu'un système $\partial_t u + A \partial_x u = 0 \in \mathbb{R}^n$ était hyperbolique si A est $\mathbb{R}$-diagonalisable. Je croyais en avoir parlé il y a plusieurs semaines !

Rappel : quand nous avons classé les EDP linéaires scalaires d'ordre 2

$$a(x)u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\partial^2_{i,j} u(x) = f(x),$$

nous avons dit que cette EDP était hyperbolique en x si la matrice $\tilde{C}(x)$, avec $\tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}+c_{ji}}{2}$ ($\tilde{C}$ est symétrique réelle)

a 1 valeur propre strictement positive et $n-1$ strictement négatives (ou le contraire). Exemple : l'équation des ondes,

$\partial^2_{tt} u - c^2 \partial^2_{xx} u = 0$, c'est bien hyperbolique au sens des EDP linéaires scalaires d'ordre 2 ($\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$).

Posons $v = \partial_t u$ et $w = \partial_x u$. On a $\partial_t v - c^2 \partial_x w = 0$: c'est une équation d'ordre 1. Par ailleurs, puisque $v = \partial_t u$ et $w = \partial_x u$, on a $\partial_t w = \partial_x v$. On a ainsi remplacé $\partial^2_{tt} u - c^2 \partial^2_{xx} u = 0$ par un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \partial_t v - c^2 \partial_x w = 0 \\ \partial_t w - \partial_x v = 0 \end{cases}, \quad \partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \partial_x \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

Les valeurs propres de A sont les λ t.q. $\lambda^2 - c^2 = 0$: $\lambda = \pm c$.

Si $c \neq 0$, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$: les 2 notions d'hyperbolicité coïncident... C'est la raison pour laquelle le même terme est utilisé !

Un système d'ordre 1 non linéaire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \in \mathbb{R}^n$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dit hyperbolique (en $u \in \mathbb{R}^n$) si $\nabla_u f(u)$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable. La raison en est que

$\partial_t u + \underbrace{\nabla_u f(u)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \partial_x u = 0$ si u est solution de classe C^1.

(Fin de la remarque)

Rappelons que nous avions obtenu le système $\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 0 \end{cases}$ grâce à des principes physiques, et que nous avons fait l'hypothèse $p = p(\rho)$ pour fermer ce système. Parfois cette hypothèse n'est pas raisonnable : p dépend aussi de la température, $p = p(\rho, T)$.

Pour fermer le système en général, on utilise une troisième loi physique : la « conservation de l'énergie totale ». Cette loi peut s'écrire sous forme d'EDP : $\partial_t \rho e + \nabla \cdot (\overset{\frown}{\rho u e} + pu) = 0$, où $\in \mathbb{R}$

e est la densité massique d'énergie (ρe est donc la densité volumique d'énergie). Il reste à relier énergie et température. On écrit que

$$\rho e = \underbrace{\frac{\rho u^2}{2}}_{\text{densité volumique d'énergie cinétique}} + \rho \varepsilon \leftarrow \text{densité volumique d'énergie interne}.$$

Il faut relier ε à T : souvent on écrit $\varepsilon = c_v T$ (relation linéaire).

Ainsi le système est fermé. Sous certaines hypothèses sur $p(\rho, T)$ ou $p(\rho, \varepsilon)$, le système est hyperbolique.

<u>Ex fameux</u> $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$ pour $\gamma > 1$: loi des <u>gaz parfaits</u> (« $PV = nRT$ »).

<u>Autre fermeture possible</u> : obtenue en supposant le fluide INCOMPRESSIBLE.

On dit qu'un fluide est incompressible lorsque le volume de ses volumes matériels est constant au cours du tps.

<u>Proposition</u> Un fluide parfait incompressible est régi par le système (d'Euler de la dynamique des fluides incompressibles)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 0 \quad \text{(en l'absence de forces extérieures)} \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0$ et $\partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 0$: déjà vu.

De $+$, on suppose que $\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\omega(t)} 1 \, dx}_{\text{volume de } \omega(t)} = 0 \quad \forall \omega(t)$ volume matériel.

Or $\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} 1 \overset{\text{Reynolds}}{=} \int_{\omega(t)} \partial_t 1 + \int_{\partial \omega(t)} 1 \, u \cdot n = 0 + \int_{\partial \omega(t)} u \cdot n \overset{\text{Green}}{=} \int_{\omega(t)} \nabla \cdot u$.

On en déduit que $\nabla \cdot u = 0$. CQFD.

Ce système est plus délicat à appréhender que celui des fluides compressibles.

La bonne manière de voir les choses est de considérer que p est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\nabla \cdot u = 0$. Ce point est plus facile à comprendre avec l'équation de Stokes (que nous n'aurons sans doute pas le tps d'aborder).

Nous allons maintenant montrer que dans certaines situations, ce modèle des fluides parfaits (incompressibles) n'est pas satisfaisant.

Paradoxe de d'Alembert

Considérons un fluide parfait incompressible homogène ($\rho = cte$) dans un écoulement stationnaire autour d'un obstacle $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ($\mathcal{O} \subset \Omega$) (et Ω grand devant $\mathcal{O}$).

Remarquons que l'équation $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0$ se réécrit

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = 0 = \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{car } \nabla \cdot u = 0$$

(incompressibilité).

Donc $\rho(t,x) = \rho^0(X(0,t,x))$ avec la bonne définition de X.

Si $\rho^0(x) = cte$ (fluide initialement homogène), $\rho(t,x) = cte \ \forall t$.

L'hypothèse d'homogénéité se résume à celle d'homogénéité initiale.

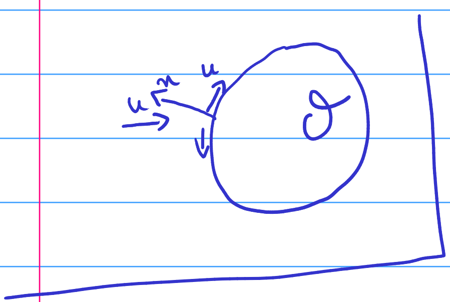
Supposer l'écoulement stationnaire revient à écrire $\partial_t \rho = 0$ et $\partial_t \rho u = 0$.

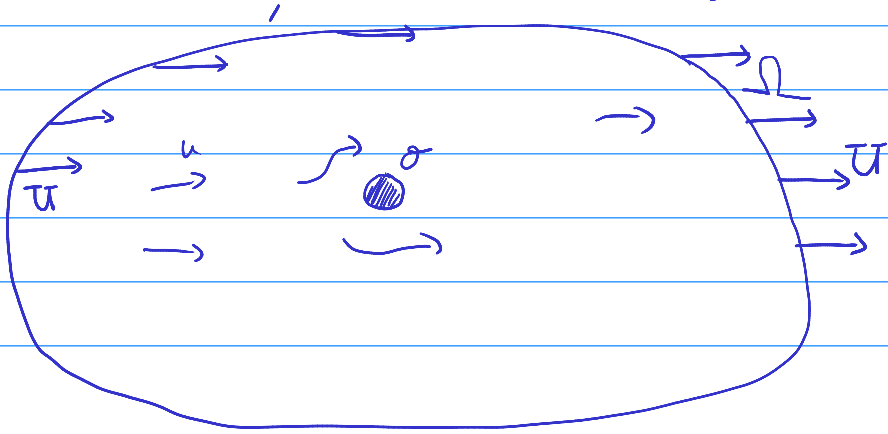
Donc
$$\begin{cases} \nabla \cdot \rho u = 0 = u \cdot \nabla \rho \\ \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

On suppose que u est donné sur le bord de Ω : $u = U$ sur $\partial\Omega$ ($U \in \mathbb{R}^3$ vecteur donné).

On suppose que l'obstacle formalisé par $\mathcal{O}$ est imperméable : ceci s'écrit

$u \cdot n = 0$ sur le bord de $\mathcal{O}$, où n est la normale à $\partial\mathcal{O}$





Cherchons une solution u du pb sous la forme $u = \nabla \varphi$ où φ est un champ scalaire (qui est donc l'inconnue du problème) : u dérive d'un potentiel.
Remarquer qu'alors $\nabla \wedge u = \operatorname{rot} u = \operatorname{curl} u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} = 0$

d'après le th. de Schwarz : on dit que u est irrotationnel.
On a $\nabla \cdot u = \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi$. Donc $\Delta \varphi = 0$.
L'hypothèse $u \cdot n = 0$ sur $\partial \mathcal{O}$ s'écrit $\nabla \varphi \cdot n = \underbrace{\partial_n \varphi}_{\text{dérivée normale.}} = 0$
L'hypothèse $u = U$ sur $\partial \Omega$ implique $\partial_n \varphi = U \cdot n$ sur $\partial \Omega$.
Le pb peut donc s'exprimer comme un pb sur φ :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \partial_n \varphi = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \quad (\text{bord intérieur de } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}) \\ \partial_n \varphi = U \cdot n & \text{sur } \partial \Omega \quad (\text{bord extérieur de } \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}) \end{cases}$$

C'est un pb elliptique, le Théorème de Lax-Milgram permet-il de montrer que ce pb est bien posé ? Non : La forme bilinéaire
$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi$ n'est pas coercive sur $H^1(\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}})$
(à la différence de $-\Delta \varphi + \varphi$, opérateur pour lequel $a(\varphi, \psi) = \int \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \psi$).
D'ailleurs, si φ est solution, $\varphi + C$ est solution, $\forall C$!
Cependant, on peut chercher φ solution à moyenne nulle
de
$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0 \\ \partial_n \varphi = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ \partial_n \varphi = U \cdot n \text{ sur } \partial \Omega \end{cases}$$
On peut montrer que sur cet espace des solutions à moyenne nulle, a est coercive (cf inégalité de Poincaré-Wirtinger).
Th de L-M $\Rightarrow$ $\exists ! \varphi$ à moyenne nulle. Remarquer que la solution qui nous intéresse est $u = \nabla \varphi$ (même si φ est défini à une constante additive près, ce n'est pas le cas de u).
Calculons la force exercée par le fluide sur l'obstacle.
Par définition de fluide parfait, cette force F vaut $F = -\int_{\partial \mathcal{O}} p\, n$ définition de p !
où n est la normale extérieure unitaire (sur $\partial \mathcal{O}$).

Remarquons que $\nabla\cdot \rho u\otimes u = (\nabla\cdot\rho u)\, u + \underbrace{(\nabla u)}_{\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \rho u$ (exo)

Donc $\begin{cases} \partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p = 0 \end{cases}$ se réécrit

$$\begin{cases} \boxed{\partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u = 0} \\ \rho\,\partial_t u + \underbrace{u\,\partial_t\rho + (\nabla\cdot\rho u)u}_{u(\underbrace{\partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u}_{0})} + (\nabla u)\,\rho u + \nabla p = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} \partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u = 0 \\ \rho[\partial_t u + (\nabla u)u] + \nabla p = 0 \end{cases}$

Le terme $(\nabla u)u$ s'écrit toujours $u\cdot\nabla u$, de sorte que le système est

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u = 0 \\ \rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = 0 \end{cases}$$

Dans le cas stationnaire, on a donc $u\cdot\nabla u + \frac{\nabla p}{\rho} = 0$,

soit dans le cas aussi homogène $u\cdot\nabla u + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$.

Or, puisque $\nabla\wedge u = 0$ (on a supposé $u = \nabla\varphi$), $u\cdot\nabla u = \nabla\left(\frac{|u|^2}{2}\right)$.

En effet : $\left(\nabla \frac{|u|^2}{2}\right)_i = \partial_i\left(\sum_j \frac{u_j^2}{2}\right) = \sum_j \partial_i\left(\frac{u_j^2}{2}\right) = \sum_j u_j\,\partial_i u_j$.

Or $\nabla\wedge u = 0 \iff \partial_i u_j = \partial_j u_i \quad \forall i,j = 1,\dots,3$. Donc

$$\left(\nabla\left(\frac{|u|^2}{2}\right)\right)_i = \sum_j u_j\,\partial_j u_i = (u\cdot\nabla u)_i \quad (\forall i\,!)$$

Finalement, on a $\nabla\left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0$: $\frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cte}$

(th. de Bernoulli).

Revenons au calcul de la force exercée par le fluide sur l'obstacle.

$$F = -\int_{\partial\mathcal{O}} p\,n = \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\rho\frac{|u|^2}{2} - \rho\,\text{Cte}\right) n = \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\rho|u|^2}{2}\,n \quad \text{car } \rho = \text{cte},$$

et $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{O}} K\,n \overset{\text{Green}}{=} \int_{\mathcal{O}} \nabla K = 0$ (K constante).

$$\boxed{F = \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\rho|u|^2}{2}\,n}$$

Si on considère le même pb avec donnée $-\mathcal{U}$ sur $\partial\Omega$ (au lieu de $+\mathcal{U}$) et si on suppose que $\mathcal{O}$ et Ω sont symétriques/un plan orthogonal à $\mathcal{U}$ (par exemple : $\mathcal{O}$ et Ω sont deux boules de même centre), une solution du pb est $-u = -\nabla\varphi$ et la force exercée par le fluide sur l'obstacle est $-F$. D'autre part,

$$-F = \int_{\partial} \rho \frac{|-u|^2}{2} n = \int_{\partial} \rho \frac{|u|^2}{2} n = F \; : \; F = -F, \; \boxed{F = 0} \, !$$

C'est le paradoxe de d'Alembert.

Pour le résoudre, nous allons tenter de trouver un meilleur modèle de fluide (Navier-Stokes).