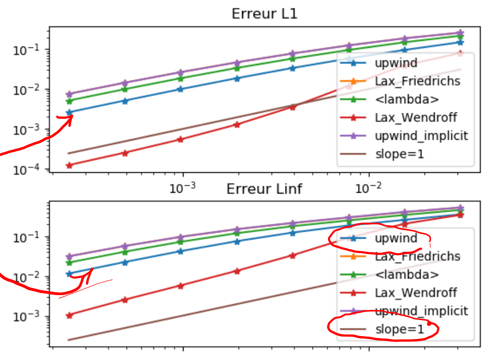
COURS DU 25 NOVEMBRE

La semaine dernière nous avons essayé de comprendre comment le schéma upwind se comportait pour des solutions peu régulières (non $\mathcal{C}^2_b$). Notre analyse était guidée par des observations de résultats numériques :

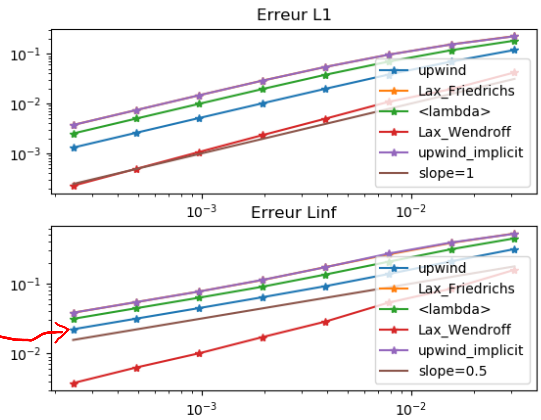
Estimations d'erreurs expérimentales pour donnée régulière



Upwind

pente ~ 1

Donnée seulement lipschitzienne ($\wedge$)



Upwind

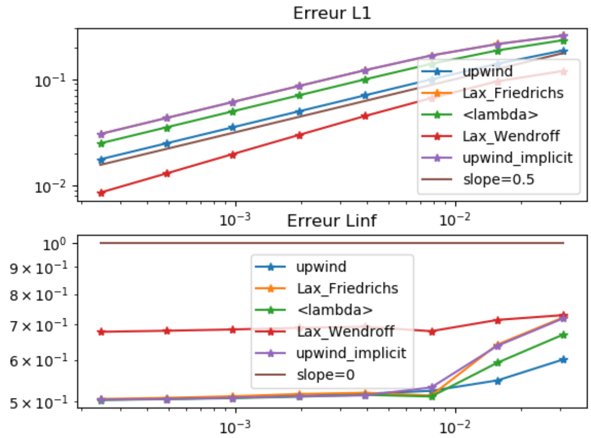
pente $\sim 1/2$

On a montré ce résultat observé la semaine dernière.

Pour une donnée dans BV (à variation bornée), on observe la convergence à l'ordre $1/2$ en norme L^1 ($L^\infty_t L^1_x$).

Donnée : fonction indicatrice.

ordre $\sim 1/2$.



ordre ~ 0 $\longrightarrow$

On peut démontrer cette convergence à l'ordre $1/2$ ($L^\infty_t L^1_x$) avec des arguments similaires à ceux de la semaine dernière, mais c'est un peu délicat car il faut estimer l'erreur de consistance en norme $L^\infty_t L^1_x$...

<u>Autre méthode pour montrer la cv à l'ordre $1/2$ dans le cas où la solution est lipschitzienne ($1/2$ en norme L^∞).</u>

Cette méthode est basée sur une nouvelle interprétation du schéma upwind (interprétation probabiliste).

Rappel : on considère le pb de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + a\,\partial_x u = 0 & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow u(t,x) = u^0(Z(t,x)) \text{ où } Z(t,x) = x - at.$$

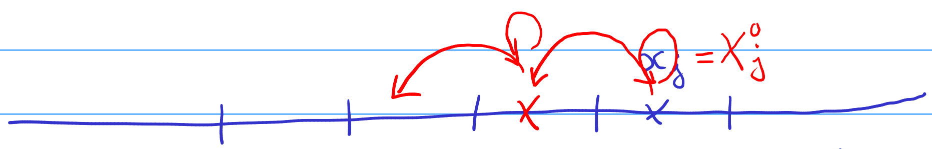
et le schéma $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\,\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (a>0)$.

Définissons la suite aléatoire K_j^n :

$$K_j^n = \begin{cases} j & \text{si } n = 0 \\ \begin{cases} K_j^{n-1} & \text{avec proba } 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\ K_j^{n-1} - 1 & \text{avec proba } \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{cases} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

$(j \in \mathbb{Z})$

et posons $X_j^n = x_{K_j^n} = K_j^n \Delta x$.



Lemme

- $\mathbb{E}_n(X_j^{n+1} - X_j^n) = -a\Delta t$. $\quad \left(\mathbb{E}_n(X_j^{n+1} - X_j^n) = \mathbb{E}(X_j^{n+1} - X_j^n \mid X_j^n)\right)$.
- $u_j^n = \mathbb{E}_0(u^0_{K_j^n}) = \mathbb{E}(u^0_{K_j^n})$.

<u>Démo</u> • $\mathbb{E}_n\left(X_j^{n+1} - X_j^n\right) = 0 \times \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + (-\Delta x) \times \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

$= -a\Delta t.$

<u>Interprétation</u>: X_j^n se déplace en moyenne de $-a\Delta t$ à chaque pas de tps: X_j^n se déplace en moyenne à la vitesse de la caractéristique Z.

• Soit $k \geq 0$, soit $n \geq 0$

$$\mathbb{E}_n\left(u^k_{K_j^{n+1}}\right) = u^k_{K_j^n} \times \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + u^k_{K_j^n - 1} \times \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

$$= u^{k+1}_{K_j^n} \quad (\text{upwind !})$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}_n\left(u^k_{K_j^{n+2}}\right) = \mathbb{E}_n\left(\mathbb{E}_{n+1}\left(u^k_{K_j^{n+2}}\right)\right) \quad (\text{Fubini})$$

$$= \mathbb{E}_n\left(u^{k+1}_{K_j^{n+1}}\right) = u^{k+2}_{K_j^n} \ldots$$

Par <u>récurrence</u>:

$$\mathbb{E}_0\left(u^0_{K_j^n}\right) = u_j^n.$$

Le schéma upwind est l'<u>ESPÉRANCE D'UN SCHÉMA ALÉATOIRE</u>.

En particulier ceci permet d'écrire u_j^n de manière condensée:

$$u_j^n = \mathbb{E}\left(u^0_{K_j^n}\right)$$

$$\left(\text{à comparer à } u(t,x) = u^0(x - at)\right).$$

CQFD.

On veut estimer $|u(n\Delta t, x_j) - u_j^n| = e_j^n$. On suppose u^0 lipschitzienne.

$$e_j^n = \left|u^0\left(Z(t^n,x_j)\right) - \mathbb{E}_0\left(u^0(X_j^n)\right)\right| = \left|\mathbb{E}_0\left(u^0(Z(t^n,x_j)) - u^0(X_j^n)\right)\right|$$

$$\leq \mathbb{E}_0\left(\left|u^0(Z(t^n,x_j)) - u^0(X_j^n)\right|\right) \leq L\,\mathbb{E}_0\left(\left|Z(t^n,x_j) - X_j^n\right|\right)$$

si L est le module de Lipschitz de u^0. Estimons $\mathbb{E}_0\left(|Z(t^n,x_j) - X_j^n|\right)$!

$$|Z(t^n,x_j) - X_j^n| = |x_j - na\Delta t - X_j^n| = |-na\Delta t - (X_j^n - x_j)| = |-na\Delta t - (X_j^n - X_j^0)|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^n \left(-a\Delta t - (X_j^k - X_j^{k-1})\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^n (-\Delta M^k)\right|$$

avec $\Delta M^k = X_j^k - X_j^{k-1} + a\Delta t$ (incrément martingale).

<u>Rappel</u>: $\mathbb{E}_{k-1}(\Delta M^k) = 0$.

$$|Z(t^n,x_j) - X_j^n| = \left|\sum_{k=1}^n \Delta M^k\right|, \text{ donc } \mathbb{E}_0\left(|Z(t^n,x_j) - X_j^n|\right) = \mathbb{E}_0\left(\left|\sum_{k=1}^n \Delta M^k\right|\right).$$

$$\left[\mathbb{E}_0\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta M^k\right|\right)\right]^2 \leq \mathbb{E}_0\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta M^k\right|^2\right) \quad \left(\text{Cauchy - Schwarz ou Jensen}\right)$$

$$= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta M^k)^2\right) + 2\,\mathbb{E}_0\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}\Delta M^i\,\Delta M^j\right)$$

$$= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta M^k)^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}_0\left(\Delta M^i\,\Delta M^j\right)$$

$$= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^{n}|\Delta M^k|^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}_0\left(\mathbb{E}_{j-1}\left(\Delta M^i\,\Delta M^j\right)\right) \quad (\text{Fubini})$$

$$= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^{n}|\Delta M^k|^2\right) + \underbrace{2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}_0\Big(\Delta M^i\,\underbrace{\mathbb{E}_{j-1}(\Delta M^j)}_{0\,!}\Big)}_{0} \quad \text{car } i\leq j-1$$

$$= \mathbb{E}_0\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta M^k)^2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_0\left((\Delta M^k)^2\right).$$

Or $\mathbb{E}\left((\Delta M^k)^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{k-1}\left((\Delta M^k)^2\right)\right)$ (Fubini)

$$= \mathbb{E}_{k-1}\left(|\Delta M^k|^2\right)$$

$$= \mathbb{E}_{k-1}\left(\left(X^k - X^{k-1} + a\Delta t\right)^2\right)$$

$$= (0 + a\Delta t)^2 \times \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + \left(-\Delta x + a\Delta t\right)^2 \times \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

$$= (a\Delta t)^2\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + (\Delta x - a\Delta t)^2\,\frac{a\Delta t}{\Delta x} = a\Delta t\left(\Delta x - a\Delta t\right)$$

$$\leq a\Delta t\,\Delta x.$$

Conclusion :

$$\mathbb{E}_0\left(\left|Z(t^n, x_j) - X_j^n\right|\right) = \mathbb{E}_0\left(\left|\sum \Delta M^k\right|\right) \leq \mathbb{E}_0\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta M^k\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(n\,a\,\Delta t\,\Delta x\right)^{1/2}$$

Ainsi : $e_j^n \leq L\sqrt{a\,t^n\,\Delta x}$.

Remarque on a supposé que la condition de CFL $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ était vérifiée !

Sinon $1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ n'est pas un coeff. de proba.

Cette analyse a le mérite d'être généralisable

- dans le cas où a n'est pas constante ;
- en dimension d'espace quelconque ;
- sur des maillages quelconques.

FIN DU CHAPITRE TRANSPORT.

Remarque Nous n'avons étudié la convergence que dans $L^\infty_{t,x}$.
Nous nous sommes contenté d'estimations du type

$$|e_j^n| \leq \dots (\Delta x^\alpha) \qquad \forall j, n.$$

Et on a parlé de « convergence ». Que signifie-ce ?
Il faut garder à l'esprit que le schéma fournit des valeurs discrètes. Avec ces valeurs il faut construire une fonction. Dans le chapitre sur les équations non linéaires on a choisi

$$u_\Delta(t,x) = \sum_j \sum_n u_j^n \mathbb{1}_{[t^n, t^{n+1}[}(t) \mathbb{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x)$$

(on pourrait aussi choisir une reconstruction affine par morceaux et continue, etc.)

Ensuite il faudrait estimer

$$\|u - u_\Delta\| \text{ et m.q. c'est } \leq C(t)\Delta x^\alpha \dots$$

Ce n'est pas difficile dans notre cas (il y a un terme d'erreur $\Delta x + \Delta t$ en plus).

Attention en posant $e_j^n = u_j^n - u(t^n, x_j)$ et $e^N = (e_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}^{n \text{ t.q. } n\Delta t \leq T}$,
on aurait envie d'écrire

$$\|e\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\Delta x \to 0} 0 \quad (\text{à une certaine vitesse}).$$

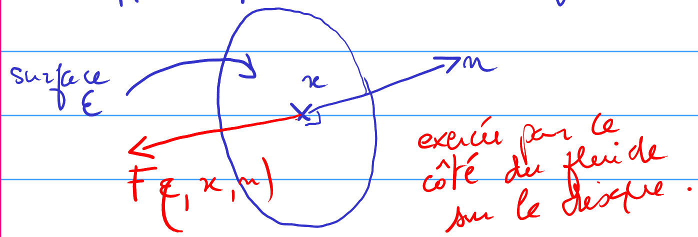
mais ceci n'est pas correct car la taille de e dépend de Δt. Ceci est « encore plus vrai » lorsque la norme considérée est une norme ℓ^p $(p < \infty)$.

III) Fluides parfaits

Ici on va encore traiter de phénomènes de transport, mais le champ de vitesses u ne sera plus prescrit : on va utiliser le principe fondamental de la dynamique pour obtenir une équation sur u...

<u>Définition</u> (fluide parfait, pression)

Soit x un point situé dans le domaine occupé par le fluide considéré ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$...). Soit n un vecteur unitaire. Soit $\varepsilon > 0$. On note $D(\varepsilon, x, n)$ le disque (si le domaine est $\mathbb{R}^3$) centré en x, orthogonal à n, d'aire ε.
Notons $F(\varepsilon, x, n)$ la force exercée par le fluide situé du côté où pointe n sur le disque $D(\varepsilon, x, n)$. Si $\frac{F(\varepsilon, x, n)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -p(x)\, n$ où $p(x)$ est un scalaire qui ne dépend pas de n, on dit que le fluide est parfait et on appelle pression au sein du fluide le scalaire p.



<u>Proposition</u> On considère un fluide parfait de densité volumique de masse $\rho(t,x)$, de vitesse $u(t,x)$ et de pression $p(t,x)$. On suppose que fluide est soumis à une force extérieure de densité volumique $f(t,x)$. Alors ρ et u satisfont à

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 & \in \mathbb{R} \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u + p I_d) = f & \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(si d est la dimension).

Dans cette proposition :

- $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$ pour u, v vecteurs.
- $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i u_i$ pour u champ de vecteurs.
- $\nabla \cdot M$ est le (champ de) vecteurs dont chaque ligne est la divergence de la ligne de M correspondante (pour M champ de matrices) :

$$(\nabla \cdot M)_i = \sum_j \partial_j M_{ij}.$$

<u>Démo</u> Soit $\omega(t)$ un volume matériel (au tps t).

- $\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho(t,x)\,dx = 0$
$$= \int_{\omega(t)} \partial_t \rho + \int_{\partial\omega(t)} \rho u \cdot n \quad \text{(Reynolds)}$$
$$= \int_{\omega(t)} \partial_t \rho + \int_{\omega(t)} \nabla \cdot \rho u \quad \text{(Green)}.$$
Ceci étant vrai pour tout ω $(\ldots)$,
$$\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0}$$

- $\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho u = \int_\omega \partial_t \rho u + \int_{\partial\omega} (\rho u)(u\cdot n)$ (Reynolds).

Or $\left(\int_{\partial\omega} (\rho u)(u\cdot n)\right)_i = \int_{\partial\omega} \rho u_i\, u\cdot n \overset{\text{Green}}{=} \int_\omega \nabla\cdot(\rho u_i u) = \int_\omega \sum_j \partial_j(\rho u_i u_j)$
$$= \int_\omega \left(\nabla \cdot \rho u \otimes u\right)_i \quad \left(\text{cf. définitions de } u\otimes u \text{ et de } \nabla\cdot M\right).$$

Donc $\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho u = \int_\omega \partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u$.

Par ailleurs, $\int_\omega \rho u$ est la quantité de mouvement du fluide occupant ω. Donc, d'après Newton,

$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho u$ = somme des forces agissant sur ω :
$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho u = \int_\omega f + \int_{\partial\omega} -pn \quad \text{(fluide parfait de pression } p\text{)}.$$

Finalement : $\int_\omega \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u = \int_\omega f - \int_{\partial\omega} pn \overset{\text{(Green)}}{=} \int_\omega f - \int_\omega \nabla\cdot(p I_d)$,
$$\int_\omega \left[\partial_t \rho u + \nabla\cdot\rho u\otimes u + \nabla\cdot(p I_d)\right] = \int_\omega f, \text{ d'où :}$$
$$\partial_t \rho u + \nabla\cdot\left(\rho u\otimes u + p I_d\right) = f. \qquad \text{CQFD.}$$

Ce système $\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot\rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot\rho u\otimes u + \nabla p = f \end{cases}$

est appelé système d'Euler de la dynamique des fluides parfaits.

Ce système est constitué de $(d+1)$ équations, pour $d+2$ inconnues : ρ, u (d inconnues) et p. Ce système n'est pas fermé ! Pour le fermer on est amené à faire d'autres hypothèses.

Par exemple on peut supposer que p est une fonction de ρ (dans ce cas on dit que le fluide est barotrope). Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p(\rho) = f \end{cases}$$

Sous certaines hypothèses sur $\rho \mapsto p(\rho)$, ce système est hyperbolique : en dimension 1, $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p(\rho)) = 0 \end{cases}$ $(f = 0)$

se réécrit $\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} + A \, \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = 0$ avec

$$A = ? \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + p'(\rho) & \frac{2 \rho u}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p'(\rho) - u^2 & 2u \end{pmatrix}.$$

A a pour valeurs propres les λ t.q.

$$-\lambda(2u - \lambda) + u^2 - p'(\rho) = 0,$$

$$\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - p'(\rho) = 0,$$

$$\Delta = 4u^2 - 4u^2 + 4p'(\rho) = 4p'(\rho) :$$

$$\lambda_\pm = \frac{2u \pm 2\sqrt{p'(\rho)}}{2} = u \pm \sqrt{p'(\rho)}$$: c'est réel si $p'(\rho) \geq 0$.

Par ailleurs, si $p'(\rho) = 0$, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout u ($u = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). A est $\mathbb{R}$-diagonalisable $\forall \rho, u$ ssi $p'(\rho) > 0$ $\forall \rho$: la pression est une fonction strictement croissante de ρ...