INTRODUCTION AUX EDP

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation entre les dérivées partielles d'une fonction qui est en général l'<u>inconnue</u> de la relation.

Souvent l'EDP est obtenue par modélisation (mathématique) de phénomènes physique.

CLASSIFICATION DES EDP LINÉAIRES SCALAIRES (l'inconnue est à valeurs scalaires) D'ORDRE 2 (l'EDP implique des dérivées partielles d'ordre au plus 2) RÉELLES.

Une telle EDP s'écrit $a(x)\,u(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\,\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} c_{ij}(x)\,\partial^2_{ij} u(x) = f(x)$

où : • $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue

• a, b_i, c_{ij} et f sont des données.

Si u est une solution de classe $C^2(\mathbb{R}^d)$, $\partial^2_{ij} u(x) = \partial^2_{ji} u(x)$ $\forall x$ (théorème de Schwarz). Donc u est aussi solution de

$$a u + \sum_i b_i \partial_i u + \sum_i \sum_j \tilde{c}_{ij}\, \partial^2_{ij} u = f \qquad (\forall x),$$

où $\tilde{c}_{ij} = \dfrac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$.

On a $\tilde{c}_{ij} = \tilde{c}_{ji}$ $\forall i,j$: la matrice $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})_{i,j=1}^{d}$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Elle est donc $\mathbb{R}$-diagonalisable.

On classe parfois (et dans cette introduction !) ces EDP selon le spectre de $\tilde{C}$.

Soit $d_+(x)$ le nombre de valeurs propres de $\tilde{C}(x)$ strictement positives.

Soit $d_-(x)$ ——————————————— négatives.

Soit $d_0(x)$ la multiplicité de 0 comme valeur propre. On a $d_+ + d_- + d_0 = d$ $\forall x$.

Déf On dit que l'EDP est

• elliptique en x si $d_+(x) = d$ ou $d_-(x) = d$.

• parabolique en x si $d_0(x) = 1$ et $\begin{cases} d_+(x) = d-1 \\ \text{ou } d_-(x) = d-1 \end{cases}$.

• hyperbolique en x si $d_+(x) = d-1$ et $d_-(x) = 1$
ou $d_+(x) = 1$ et $d_-(x) = d-1$.

Exemples

Th de représentation de Riesz ou Th de Lax-Milgram

① $-\Delta u = f$, où $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{ii}^2 u$: $\tilde{C} = C = -I_d$. ELLIPTIQUE

② $-\Delta u + u = f$ ELLIPTIQUE

transformée ou séries de Fourier

③ $\partial_t u = \Delta u$, qui signifie $\partial_t u(t,x) = \Delta_x u(t,x)$

$$\left(\Delta_x = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i,x_i} u \right)$$

est PARABOLIQUE en dimension $d+1$: $C = \pm \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \, 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$.

méthode des caractéristiques

④ $\partial_{tt}^2 u = c^2 \Delta u$, qui signifie $\partial_{tt}^2 u(t,x) = c^2 \Delta_x u(t,x)$ $\quad (c \in \mathbb{R}_+^*, \ c^2 > 0)$

est HYPERBOLIQUE en dimension $d+1$: $C = \pm \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \, 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$.

En bleu ciel : techniques que nous utiliserons pour étudier ces EDP.

Remarque Il existe une autre notion d'hyperbolicité : elle concerne l'EDP d'ordre 1 $\quad \partial_t u + A \, \partial_x u = 0 \quad \in \mathbb{R}^n$ (EDP non scalaire !)

$$(u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n).$$

On dit que cette EDP est hyperbolique si A est $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Pourquoi utilise-t-on le même terme pour 2 EDP très différentes ?

→ Explication avec l'EDP $\partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u$ (équation hyperbolique $(x \in \mathbb{R})$) (cette équation est appelée équation des ondes).

Posons $v = \partial_t u$ et $w = \partial_x u$.

On a (si $\partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u$) : $\partial_t v = c^2 \partial_x w$.

Si $u \in C^2$, on a aussi $\partial_x v = \partial_t w$ (Schwarz).

Ainsi : $\begin{cases} \partial_t v = c^2 \partial_x w \\ \partial_t w = \partial_x v \end{cases}$, soit $\partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$,

$$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + A \, \partial_x \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^2) \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont les λ t.q. $\lambda^2 - c^2 = 0$: $\lambda = \pm c$.

A est $\mathbb{R}$-diagonalisable : l'équation des ondes est hyperbolique, qu'on la considère comme une EDP scalaire d'ordre 2 ou un système d'ordre 1.

Exemple très simple de « système » hyperbolique :

$$\partial_t u + a\,\partial_x u = 0 \in \mathbb{R}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ (est donné).}$$

Cette équation est appelée équation de transport à vitesse a.

On s'intéressera aussi à $\partial_t u(t,x) + a(t,x)\,\partial_x u(t,x) = 0$

où a est une fonction donnée,

et à $\partial_t u(t,x) + \partial_x (a u)(t,x) = 0$

où a est une fonction donnée.

ÉQUATIONS DE TRANSPORT.

1) Transport à vitesse a constante

$$\partial_t u + a\,\partial_x u = 0 \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

On associe à cette EDP une donnée de Cauchy : $u(0,x) = u^0(x)$ (donnée).

Le pb de Cauchy $\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$ est très facile à résoudre !

En effet, la solution en est donnée par $u(t,x) = u^0(x-at)$.

Cette fonction vérifie $u(0,x) = u^0(x)$ (Ok pour la donnée de Cauchy)

et : $\left.\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= -a\, u^{0\prime}(x-at) \\ \partial_x u(t,x) &= u^{0\prime}(x-at) \end{aligned}\right\}$ de sorte que $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ (OK pour l'EDP).

On a m.q. il existe une solution, donnée par $u(t,x) = u^0(x-at)$.

Cette solution est-elle unique ? Oui.

Soient u et v 2 solutions du pb de Cauchy.

On a $\begin{cases} \partial_t(u-v) + a\,\partial_x(u-v) = 0 \\ (u-v)(0,\cdot) = 0 \end{cases}$

Pour montrer l'unicité, il suffit de m.q. l'unique solution de $\begin{cases} \partial_t w + a\,\partial_x w = 0 \\ w(0,\cdot) = 0 \end{cases}$ est $w(t,x) = 0$.

Si $\partial_t w + a\partial_x w = 0$, $w\,\partial_t w + a\, w\,\partial_x w = 0$, soit

$\partial_t\left(\frac{w^2}{2}\right) + a\,\partial_x\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$. Attention, $\partial_{t,x}\left(\frac{w^2}{2}\right)$

signifie ici $\partial_{t,x}\left[(t,x) \longmapsto \frac{w(t,x)^2}{2}\right]$ (abus de notation !).

Donc $\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{w^2}{2}(t,x)\,dx + a \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_x \frac{w^2}{2}(t,x)\,dx}_{0 \ \left(\text{si } \frac{w^2}{2} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\right)} = 0$,

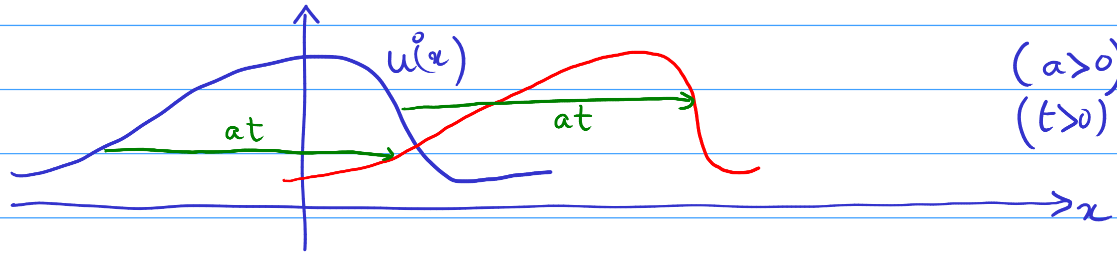
(si $\partial_t \int_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \partial_t$)

donc $\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{w^2}{2}\,dx = 0$: $\int_{\mathbb{R}} \frac{w^2}{2}(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{w^2}{2}(0,x)\,dx = 0$,

donc $\frac{w^2}{2}(t,\cdot) = 0$ p.p.

(on a montré l'unicité dans la classe des fonctions de L^2, qui tendent vers 0 à l'infini, et qui sont régulières (C^1)).

Le fait que la solution soit donnée par $u(t,x) = u^0(x-at)$ explique la terminologie « équation de transport » : la solution $u(t,\cdot)$, est u^0 translaté (transporté) de at :



$(a>0)$
$(t>0)$

En TP nous allons tenter d'approcher ces solutions avec des schémas numériques. Ceci peut paraître inutile puisque l'on connaît la solution exacte.

En réalité les approches numériques pour résoudre $\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$

permettront de résoudre des équations plus complexes, comme

$$\begin{cases} \partial_t u + a(t,x)\,\partial_x u = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$$

(pour lesquelles on sait montrer l'existence et l'unicité mais on ne sait pas (en général) calculer les solutions)

ou des systèmes hyperboliques plus généraux.

La semaine prochaine nous étudierons $\begin{cases} \partial_t u + a(t,x)\,\partial_x u = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$ équation NON CONSERVATIVE

et, peut-être, $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(au) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$ équation CONSERVATIVE (cf. plus loin pour la terminologie)

par la méthode des caractéristiques.

Et nous voici la semaine prochaine !

2) Transport non conservatif à vitesse variable

On s'intéresse ici à $\partial_t u(t,x) + a(t,x)\,\partial_x u(t,x) = 0$ $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, où a est une fonction régulière donnée ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Pour étudier les problèmes de Cauchy associés à cette EDP, commençons par réinterpréter ce que nous avons fait dans le cas où $a(t,x) = a$. Dire que $u(t,x) = u^0(x-at)$ peut s'exprimer : $u(t, x+at) = u^0(x)$, $\forall t, \forall x$: $u(t,x+at)$ ne dépend pas de t (pour tout $x \in \mathbb{R}$), autrement dit, elle est constante sur les droites $(t, x+at)$ (droites paramétrées par $t \in \mathbb{R}$).

La fonction $u(t,x)$ est constante sur les courbes $(t, X(t,x))$ où $X(t,x) = x + at$ (remarquer que $x = X(0,x)$).

Dans le cas g^{l} où a est variable, nous allons chercher des courbes $(t, X(t,x))$ sur lesquelles u est « constante » : ne dépend pas de t.

Dire que u ne dépend pas de t sur la courbe $(t, X(t,x))$ (pour tout x ...) s'écrit : $u(t, X(t,x))$ ne dépend pas de t, soit

$$\frac{d}{dt}\left(t \longmapsto u(t, X(t,x))\right) = 0 \qquad \forall t,\ \forall x.$$

Or $\frac{d}{dt}\left(t \mapsto u(t, X(t,x))\right) = \partial_t u(t, X(t,x)) + \partial_t X(t,x)\, \partial_x u(t, X(t,x))$

(on suppose X et u de classe C^1).

Par ailleurs, $\partial_t u(t,x) + a(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ $\forall t, x$. Donc $\partial_t u(t, X(t,x)) = -a(t, X(t,x))\partial_x u(t, X(t,x))$

et $\frac{d}{dt}\left(t \mapsto u(t, X(t,x))\right) = 0 = \left[\partial_t X(t,x) - a(t, X(t,x))\right] \partial_x u(t, X(t,x))$.

Pour que (t, X) soit une telle courbe sur laquelle u ne dépende pas de t, il suffit

$$\partial_t X(t,x) = a(t, X(t,x)).$$

Pour tout x, c'est une EDO. Nous allons considérer la famille de pb de Cauchy (d'EDO)

$$(C_x)\begin{cases} \partial_1 X(t,x) = \partial_t X(t,x) = a(t, X(t,x)) \\ X(0,x) = x \end{cases}$$

<u>Hyp</u> sur a : a est continue, et $\boxed{\text{globalement}}$ lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (variable de champ). Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale à (C_x) $(\forall x)$ et cette solution est $\boxed{\text{globale}}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, puisque u est constante sur (t, X), on a

$$u(t, X(t,x)) = u(0, X(0,x)) = u(0,x) = u^0(x).$$

Cependant la vraie question est : Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, que vaut $u(t,x)$?

Existe-t-il, pour tout (t,x), un $y \in \mathbb{R}$ t.q. $x = X(t,y)$. Si c'est le cas, $u(t,x) = u(t, X(t,y)) = u^0(y)$. Cette question est celle de l'inversibilité de $X(t,\cdot)$ (à t fixé). Même si cela peut paraître délicat, il n'en est rien !

Cette inversibilité est une conséquence directe du th. de Cauchy-Lipschitz.

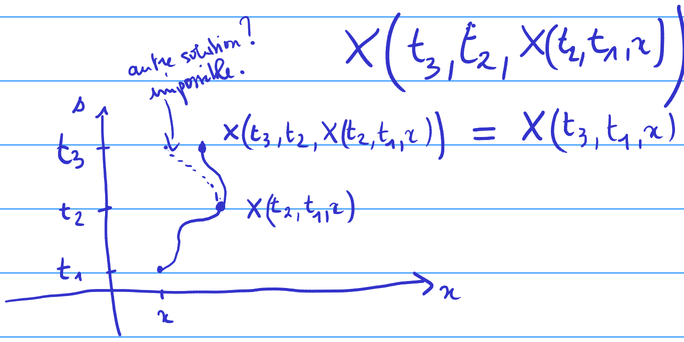
Pour le comprendre, nous allons généraliser ces courbes (t, X).

nouvelle variable : c'est le temps de la donnée de Cauchy.

Considérons les pb de Cauchy
$$(C_{t,x})\begin{cases} \partial_1 X(s,t,x) = a(s, X(s,t,x)) \\ X(t,t,x) = x \end{cases}$$

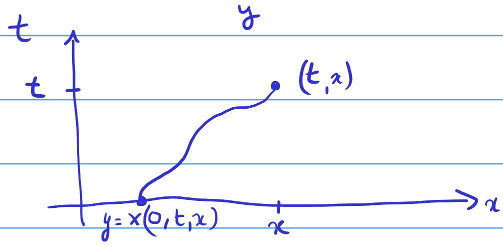
(le $X(t,x)$ précédent était le nouveau $X(t,0,x)$).

Pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^2$, le th de Cauchy-Lipschitz s'applique pour $(C_{t,x})$.
De plus, les solutions $X(\cdot,t,x)$ satisfont à la propriété de semi-groupe :
$$X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) = X(t_3,t_1,x),\ \forall x, t_1,t_2,t_3$$



Conséquence de l'unicité dans le th de C-L.

Donc : soit $(t,x)\in\mathbb{R}^2$, $\exists\, y\in\mathbb{R}$ t.q. $X(t,0,y) = x$ (c'était la question à la fin de la page précédente). En effet, $y = X(0,t,x)$ satisfait à cette propriété :
$$X(\overset{t_3}{t},\overset{t_2}{0},\underbrace{X(\overset{t_2}{0},\overset{t_1}{t},x)}_{y}) = X(t,t,x) = x.$$



Ceci permet de « résoudre » le pb d'EDP : puisque u est constante sur (t,X), on a
$$u(t,x) = u(0,X(0,t,x)) = u^0(X(0,t,x)).$$

Qu'a-t-on fait exactement ? On a montré (sous des hypothèses sur a) que tous les pb de Cauchy $(C_{t,x})$ admettent une unique solution globale en temps, et que : si u est solution de $\begin{cases}\partial_t u + a\,\partial_x u = 0 & (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u(0,\cdot) = u^0\end{cases}$,

nécessairement $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$: il existe donc au plus une solution.

On a donc une démonstration plus propre de l'unicité que la semaine dernière !

Il reste donc à montrer qu'il existe une solution.
On a un candidat : $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$ ...

2 méthodes pour montrer que c'est solution :

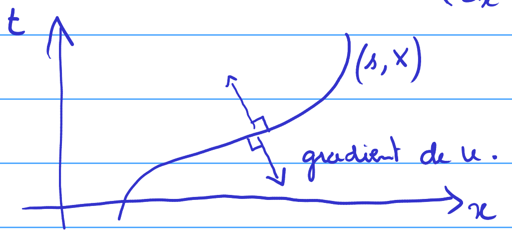
① Calcul brutal de $\partial_t u$ et de $\partial_x u$ pour $u =$
(ce n'est pas complètement évident, car ceci implique le calcul de $\partial_2 X(0,t,x)$ et $\partial_3 X(0,t,x)$).
cf. mes notes de cours d'EDP sur ma page personnelle.

② On a posé $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$. Conséquence :

$$u(s, X(s,t,x)) = u^0(X(\overset{t_3}{0}, \overset{t_2}{s}, X(\overset{t_2\, t_1}{s,t,x}))) \overset{\text{semi-groupe}}{=} u^0(X(0,t,x)) :$$

u est constant sur les courbes $(s, X(s,t,x))$

Donc son gradient $\begin{pmatrix}\partial_t u\\ \partial_x u\end{pmatrix}$ est <u>orthogonal</u> à ces courbes.



(les courbes $(s, X(s,t,x))$ sont les courbes de niveau de u)

$\begin{pmatrix}\partial_t u\\ \partial_x u\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur tangent à la courbe $(s, X(s,t,x))$.

Ce vecteur tangent est $\begin{pmatrix}1\\ \partial_1 X(s,t,x)\end{pmatrix}$ (vecteur non normalisé).

Finalement $\begin{pmatrix}\partial_t u(s,X(s,t,x))\\ \partial_x u(s,X(s,t,x))\end{pmatrix} \underset{\text{produit scalaire euclidien}}{\cdot} \begin{pmatrix}1\\ \partial_1 X(s,t,x)\end{pmatrix} = 0$, soit

$$\partial_t u(s, X(s,t,x)) + \partial_1 X(s,t,x)\, \partial_x u(s, X(s,t,x)) = 0, \text{ soit}$$

$$\partial_t u(s, X(s,t,x)) + a(s, X(s,t,x))\, \partial_x u(s, X(s,t,x)) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout s,t,x, c'est vrai pour tout $s=t, t, x$:

$$\partial_t u(t,x) + a(t,x)\,\partial_x u(t,x) = 0 \; : \; u \text{ est solution !}$$

<u>Théorème</u> Soit $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu, et globalement lipschitzien par rapport à sa seconde variable. Soit $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + a\, \partial_x u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$$

admet une unique solution : $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$ où X est la famille de solutions de $\begin{cases} \partial_1 X(s,t,x) = a(s, X(s,t,x)), & s \in \mathbb{R} \\ X(t,t,x) = 0 \end{cases}$ $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Les courbes X sont appelées courbes caractéristiques (ou caractéristiques tout court) (d'où « méthode des caractéristiques »).
Le point $X(0,t,x)$ est appelé pied de la caractéristique passant par (t,x).

3) <u>Équation de transport conservatif</u> (toujours en dimension 1 d'espace)

Cette équation est $\partial_t u + \partial_x(au) = 0$. Si u et a sont de classe C^1,

$$\partial_t u + \partial_x au = \partial_t u + a\partial_x u + u\partial_x a = 0.$$

Un peu de modélisation ... Considérons un milieu (fluide) animé d'une vitesse $a(t,x)$ donnée.
Soit $\rho(t,x)$ une quantité liée au fluide conservée dans les volumes materiels : volumes qui suivent le fluide dans son mouvement, ici des intervalles qui se déplacent à la vitesse du fluide, c'est-à-dire des intervalles du type $[b(t), c(t)]$ tels que $b'(t) = a(t, b(t))$
et $c'(t) = a(t, c(t))$.

L'expression « ρ est conservée dans les volumes matériels » signifie alors :
$$\int_{b(t)}^{c(t)} \rho(t,x)\,dx = \text{cte} \quad (\text{ne dépend pas de } t).$$

Un exemple naturel d'une telle quantité ρ est la densité volumique de masse du fluide (aussi appelée densité du fluide) : $\int_{b(t)}^{c(t)} \rho(t,x)\,dx$ est la masse du fluide contenu dans $[b,c]$ au temps t.

Dire que $\int_{b(t)}^{c(t)} \rho(t,x)dx$ ne dépend pas de t peut s'écrire $\frac{d}{dt}\left(t \mapsto \int_{b(t)}^{c(t)} \rho(t,x)dx\right) = 0$.

Or :
$$\frac{d}{dt}\left(t \longmapsto \int_{b(t)}^{c(t)} \rho(t,x)\,dx\right) = \int_{b(t)}^{c(t)} \partial_t \rho(t,x)dx + c'(t)\,\rho(t,c(t)) - b'(t)\rho(t,b(t))$$
$$= \int_{b(t)}^{c(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + a(t,c(t))\,\rho(t,c(t)) - a(t,b(t))\,\rho(t,b(t))$$
$$= \int_{b(t)}^{c(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + \int_{b(t)}^{c(t)} \partial_x (a\rho)(t,x)\,dx$$
$$= \int_{b(t)}^{c(t)} \partial_t \rho + \partial_x(a\rho)\,dx .$$ Donc $\int_{b(t)}^{c(t)} \partial_t \rho + \partial_x(a\rho) = 0$, et ceci pour tous les couples $(b(t), c(t))$ $\left(\text{solutions de } \begin{matrix} b' = a(t,b) \\ c' = a(t,c) \end{matrix}\right)$:

pour tous b et c, $\int_b^c \partial_t \rho + \partial_x(a\rho)\,dx = 0$: $(\partial_t \rho + \partial_x a\rho)(t,x) = 0 \quad \forall t, x$.

Ceci donne un sens physique à l'équation $\partial_t \rho + \partial_x a\rho = 0$.
Elle est appelée éq. conservative parce qu'elle traduit la conservation (dans les volumes materiels) de (l'intégrale de) ρ. Autre manière de le voir :
(si ρ est à support compact...) $\partial_t \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho(t,x)\,dx}_{\text{quantité conservée}} = 0 \quad \left(= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x(a\rho)\,dx = 0 - 0\right)$.

Remarquer que cette propriété est fausse pour $\partial_t \rho + a\,\partial_x \rho = 0$ (éq. non conservative).

Résolvons le problème $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x a\rho = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^2 \\ \rho(0,\cdot) = \rho^0 \end{cases}$.

Posons, pour tout (t,x), X solution de $\begin{cases} \partial_1 X(s,t,x) = a(s, X(s,t,x)) \\ X(t,t,x) = x \end{cases}$.

Plaçons nous « sur les courbes caractéristiques » : considérons $\tilde{\rho}(t,x) = \rho(t, X(t,0,x))$

(pour l'éq. $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ (N.C.), $\tilde{u}(t,x) = u(t, X(t,0,x))$ ne dépend pas du temps t, donc $\partial_t \tilde{u} = 0 \ldots$). On a :

$$\partial_t \tilde{\rho}(t,x) = \partial_t \rho(t, X(t,0,x)) + \partial_1 X(t,0,x)\, \partial_x \rho(t, X(t,0,x))$$
$$= \partial_t \rho(t, X(t,0,x)) + a(t, X(t,0,x))\, \partial_x \rho(t, X(t,0,x)).$$

Or $\partial_t \rho(t,x) + \partial_x a\rho(t,x) = 0$, donc (supposons ρ et $a \in C^1$)

$$\partial_t \rho(t,x) + a\,\partial_x \rho(t,x) = -\rho\, \partial_x a\,(t,x) \quad \forall t,x, \text{ donc}$$
$$\partial_t \tilde{\rho}(t,x) = -\rho\,\partial_x a\,(t, X(t,0,x)) = -\rho(t, X(t,0,x))\,\partial_x a(t, X(t,0,x))$$
$$= -\tilde{\rho}(t,x)\, \underbrace{\partial_x a(t, X(t,0,x))}_{\text{donnée}}$$

(EDO un peu moins simple que $\partial_t \tilde{u} = 0$, du type

(une EDO pour chaque x) $\quad y'(t) = y(t) f(t)$, dont la solution est

$y(t) = y(0)\, e^{\int_0^t f(s)\,ds}$). On a :

$$\rho(t, X(t,0,x)) = \tilde{\rho}(t,x) = \tilde{\rho}(0,x)\, e^{\int_0^t -\partial_x a(s, X(s,0,x))\,ds} \qquad \left(f(t) = -\partial_x a(t, X(t,0,x))\right)$$
$$= \underbrace{\rho(0, X(0,0,x))}_{\rho(0,x) = \rho^0(x)}\, e^{\int_0^t -\partial_x a(s, X(s,0,x))\,ds}$$

Donc $\rho(t,x) \overset{\text{semi-groupe}}{=} \rho(t, X(\overset{t_3}{t}, \overset{t_2}{0}, X(\overset{t_2}{0}, \overset{t_1}{t}, x))) = \rho^0(X(0,t,x))\, e^{\int_0^t -\partial_x a(s, X(\overset{t_3}{s}, \overset{t_2}{0}, X(\overset{t_2}{0}, \overset{t_1}{t}, x)))\,ds}$

on applique la formule avec $X(0,t,x)$ au lieu de x.

$$\overset{\text{semi-groupe}}{=} \rho^0(X(0,t,x))\, e^{\int_0^t -\partial_x a(s, X(s,t,x))\,ds}.$$

Remarque si $a(t,x) = a$, $\partial_x a = 0$, l'éq. est équivalente à $\partial_t \rho + a\partial_x \rho = 0$ et par ailleurs on retrouve

$$\rho(t,x) = \rho^0(X(0,t,x)).$$

Théorème Supposons a de classe C^1 et globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Supposons $\rho^0 \in C^1$. Le problème de Cauchy (conservatif)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x a\rho = 0 \\ \rho(0,\cdot) = \rho^0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est donnée par $\rho(t,x) = \rho^0\big(X(0,t,x)\big)\, e^{-\int_0^t \partial_x a(s, X(s,t,x))\,ds}$, où

X est la famille de solutions de

$$\begin{cases} \partial_s X(s,t,x) = a\big(s, X(s,t,x)\big) \\ X(t,t,x) = x \end{cases}$$

<u>Remarque</u> Pour l'équation non conservative $\partial_t u + a\,\partial_x u = 0$,
u vérifie le principe du maximum :

$$\inf_y u^0(y) \leq u(t,x) \leq \sup_y u^0(y) \;.\quad \text{En effet :}$$

$$u(t,x) = u^0\big(X(0,t,x)\big).$$

en réalité on a même $\sup_x u(t,x) = \sup_x u^0(x)$ (et pareil pour l'inf)...

Pour l'équation conservative, ceci est faux : il y a le terme $e^{-\int \partial_x a \ldots}$.

Prochaine séance : analyse numérique (convergence, non convergence de certains schémas).