Examen partiel, vendredi 15 mars 2019

Durée : deux heures

Il sera tenu compte de la rédaction. Les arguments et les raisonnements devront être clairement détaillés. Les résultats du cours utilisés devront être explicitement cités.

Documents autorisés : deux pages de notes personnelles (calculatrices interdites).

Exercice 1. *Normes matricielles.*

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\|Ax\|_2 \leq \rho(A)\|x\|_2$. *On utilisera le théorème spectral (théorème de réduction d'une matrice symétrique réelle).*
   (b) Montrer que $|||A|||_2 = \rho(A)$.
2. *Un exemple.* On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer $\rho(A)$, $|||A|||_1$, $|||A|||_2$, $|||A|||_\infty$ et $\mathrm{cond}_2(A)$.
   (b) Soit $r \in \mathbf{R}^*$.
      i. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que la série $\sum_{i=0}^{\infty}(rA)^i$ converge.
      ii. En déduire une condition suffisante sur r pour que la matrice $(I_3 - rA)$ soit inversible.
      iii. Montrer que $I_3 - rA$ est singulière si et seulement si $\frac{1}{r}$ est valeur propre de A.
      En déduire une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $(I_3 - rA)$ soit inversible.

Exercice 2. *Factorisation LU.*

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que B est symétrique, définie positive.
2. Déterminer la factorisation LU de B en utilisant l'algorithme de Gauss.
3. Déterminer la factorisation de Cholesky de B.
4. En utilisant une des deux factorisations trouvées ci-dessus, résoudre le système $Bx = b$ pour

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *Factorisation UL.*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\alpha_k = \det\Big((A_{i,j})_{k \leq i,j \leq n}\Big)$.
On suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_k \neq 0$.
On note P la matrice définie par : pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $P_{i,j} = \delta_{n+1-i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n+1-i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que P est symétrique et orthogonale.
2. On note $B = PAP$. Exprimer pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient $B_{i,j}$ en fonction de coefficients de A.
3. Montrer que la matrice B admet une factorisation LU. On note $B = L_0 U_0$ cette factorisation.
4. En déduire que la matrice A admet une factorisation UL où U est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et L est triangulaire inférieure inversible. *On exprimera U et L en fonction de L_0 et U_0 et on justifiera soigneusement que U et L ont les propriétés cherchées.*

Exercice 4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère, pour $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et $x_1 \in \mathbf{R}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = Ax_k + Bx_{k-1}$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note y_k le vecteur de $\mathbf{R}^{2n}$ défini par $y_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $y_{k+1} = Cy_k$. *On pourra écrire C sous la forme d'une matrice par blocs.*
2. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbf{R}^n$ si et seulement si la suite $(y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbf{R}^{2n}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur C) pour que la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $0 \in \mathbf{R}^n$ pour tous x_0 et x_1.