Feuille d'exercices n° 2 - corrigé des exercices 7 à 9

SYSTÈMES LINÉAIRES BIEN POSÉS

Corrigé de l'exercice 7

Dans la suite, $\|\cdot\|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désignent la norme euclidienne et le produit scalaire usuels sur $\mathbf{R}^n$.

1. (a) Soit $u \in \mathbf{R}^n$.

Si $u = 0$ (le vecteur nul) alors $H(u) = I_n$ est symétrique et othogonale.

Supposons maintenant $u \neq 0$. On calcule d'abord, en utilisant les propriétés de la transposée (linéarité et transposée d'un produit),

$$H(u)^T = I_n^T - 2\frac{(uu^T)^T}{\|u\|^2} = I_n - 2\frac{(u^T)^T u^T}{\|u\|^2} = I_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} = H(u),$$

$H(u)$ est donc symétrique.

Ensuite, on a

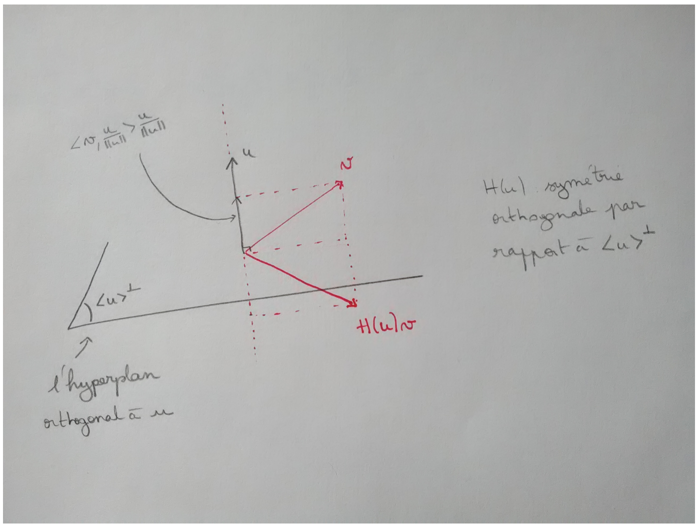
$$\begin{aligned}
H(u)H(u)^T = H(u)^2 &= \left(\mathrm{I}_n - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)^2 \\
&= I_n^2 - 2\times I_n \times 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} + \left(2\frac{uu^T}{\|u\|^2}\right)^2 \quad \text{car } I_n \text{ et } 2\frac{uu^T}{\|u\|^2} \text{ commutent} \\
&= I_n - 4\frac{uu^T}{\|u\|^2} + 4\frac{u(u^T u)u^T}{\|u\|^4} \\
&= I_n - 4\frac{uu^T}{\|u\|^2} + 4\frac{uu^T}{\|u\|^2} \quad \text{car } u^T u = \|u\|^2 \\
&= I_n
\end{aligned}$$

donc $H(u)$ est orthogonale.

On comprend mieux ce qu'est $H(u)$ en écrivant pour tout $v \in \mathbf{R}^n$,

$$H(u)v = v - 2\frac{uu^T v}{\|u\|^2} = v - 2\frac{u\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} = v - 2\frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}u = v - 2\left\langle v, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \frac{u}{\|u\|}.$$

$H(u)$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u. Voici un petit dessin :



(b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^n$, on suppose que v et e ne sont pas colinéaires. On a

$$H(v+\|v\|e)\,v = v - 2\frac{\langle v, v+\|v\|e\rangle}{\|v+\|v\|e\|^2}(v+\|v\|e).$$

Or

$$\begin{aligned}\|v+\|v\|e\|^2 &= \|v\|^2 + 2\langle v, \|v\|e\rangle + \Big\|\|v\|e\Big\|^2 \\ &= 2\|v\|^2 + 2\|v\|\langle v, e\rangle \quad \text{car } \|e\| = 1 \\ &= 2\langle v, v+\|v\|e\rangle\end{aligned}$$

donc

$$H(v+\|v\|e)\,v = v - (v+\|v\|e) = -\|v\|e.$$

Cela se voit aussi très bien sur un dessin... Faites-le !

On montre de même que $H(v-\|v\|e)\,v = \|v\|\,e$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) On cherche une matrice de Householder H telle que la matrice HA n'ait que des zéros sous la diagonale dans sa première colonne. Notons v_1 le premier vecteur colonne de A et e_1 le premier vecteur de la base canonique.

Si v_1 est colinéaire à e_1, on pose $H = I_n$ (il n'y a rien à faire...).

Sinon, on prend $H = H(v_1 + \|v_1\|e_1)$ ou $H = H(v_1 - \|v_1\|e_1)$. On a alors $Hv_1 = -\|v_1\|e_1$ ou $Hv_1 = +\|v_1\|e_1$. Dans les deux cas, la 1re colonne de HA étant le vecteur Hv_1, il y a bien des zéros sous la diagonale dans cette colonne.

Remarque : comment choisit-on l'une ou l'autre des possibilités ?

Si on le fait "à la main" sur un papier, on fait ce qu'on veut...

Si l'on veut que le coefficient diagonal $(HA)_{1,1}$ *soit positif, on choisit* $H = H(v_1 - \|v_1\|e_1)$.

Le choix peut aussi être guidé par le fait que l'on veut éviter de diviser par des nombres trop petits : comme on doit diviser par $\|v_1 \pm \|v_1\|e_1\|^2$, *si* $(v_1)_1 = A_{1,1} < 0$, *on choisit plutôt* $H = H(v_1 - \|v_1\|e_1)$ *et si* $(v_1)_1 = A_{1,1} > 0$, *on choisit plutôt* $H = H(v_1 + \|v_1\|e_1)$.

(b) On construit la suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1\le k\le n-1}$ et la suite de matrices $(A^{(k)})_{0\le k\le n-1}$ par récurrence.

— *Étape 0.* On pose $A^{(0)} = A$;

— *Étape 1.* On pose ensuite

  — $w_1 = v_1 - \|v_1\|e_1$ où v_1 est le premier vecteur colonne de A (pour fixer les choses, on mettra toujours le "-") ;

  — $H^{(1)} = H(w_1)$ (si $v_1 = \|v_1\|e_1$, alors $H^{(1)} = I_n$) ;

  — $A^{(1)} = H^{(1)}A^{(0)}$, alors $A^{(1)}$ a des zéros sous la diagonale dans sa 1re colonne.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ 0 & \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}$$

— *Étape* $k+1$. Soit $0 \leq k \leq n-2$, on suppose construites les matrices $A^{(0)},\dots,A^{(k)}$, $H^{(1)},\dots,H^{(k)}$ telles que pour tout $1 \leq j \leq k$, $A^{(j)}$ a des zéros sous la diagonale dans ses j premières colonnes, $H^{(j)}$ est une matrice de Householder et $A^{(j)} = H^{(j)}A^{(j-1)}$.

$$\begin{array}{rc}
\text{numéros de colonnes} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
A^{(k)} = & \begin{pmatrix}
\star & \star & \dots & \dots & \star & \dots & \dots & \star \\
0 & \star & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \star \\
\vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \star & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \dots & 0 & \star & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \dots & \star
\end{pmatrix}
\end{array}$$

On note $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\widetilde{v}_{k+1} = (a_{i,k+1}^{(k)})_{k+1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{n-k}$ ($\widetilde{v}_{k+1}$ correspond aux éléments en magenta dans la matrice ci-dessus).

On note aussi $\widetilde{e}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n-k}$.

On raisonne comme à la première étape mais en dimension $n-k$.

On pose $\widetilde{w}_{k+1} = \widetilde{v}_{k+1} - \|\widetilde{v}_{k+1}\|\widetilde{e}_{k+1}$, où $\|\widetilde{v}_{k+1}\|$ est la norme euclidienne du vecteur $\widetilde{v}_{k+1}$ dans $\mathbf{R}^{n-k}$.

On pose ensuite $\widetilde{H}^{(k+1)} = H(\widetilde{v}_{k+1} - \|\widetilde{v}_{k+1}\|\widetilde{e}_{k+1}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbf{R})$.

On a

$$\widetilde{H}^{(k+1)}\widetilde{v}_{k+1} = \|\widetilde{v}_{k+1}\|\widetilde{e}_{k+1} = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n-k}.$$

On définit alors $H^{(k+1)}$ par blocs

$$H^{(k+1)} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0_{\mathcal{M}_{n-k}} \\ \hline 0_{\mathcal{M}_{n-k}} & \widetilde{H}^{(k+1)} \end{array}\right) = H(w_{k+1}), \quad \text{où } w_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \widetilde{w}_{k+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

Enfin, on pose $A^{(k+1)} = H^{(k+1)}A^{(k)}$: $A^{(k+1)}$ a des zéros sous la diagonale dans ses $k+1$ premières colonnes.

Ainsi la matrice $A^{(n-1)}$ est triangulaire supérieure.

(c) On vient décrire $A^{(n-1)} = H^{(n-1)} \dots H^{(1)}A$. Or les matrices de Householder sont symétriques et orthogonales, donc pour tout $1 \leq j \leq n-1$, $H^{(j)}$ est inversible d'inverse $H^{(j)}$, ainsi en posant $Q = (H^{(n-1)} \dots H^{(1)})^{-1} = H^{(1)} \dots H^{(n-1)}$ et $R = A^{(n-1)}$, on a

$$A = QR, \quad Q \text{ orthogonale et } R \text{ triangulaire supérieure,}$$

c'est une décomposition QR de A. Avec le choix fait, on a aussi tous les coefficients diagonaux de R positifs (sauf éventuellement le dernier).

Compte d'opérations.

Pour compter le nombre d'opérations de cet algorithme, il faut compter précisément le nombre d'opérations pour faire un produit matrice $\times$ vecteur Hv avec H de Householder. Comme le demande l'énoncé, on ne compte ici que les multiplications.

Soit $0 \leq k \leq n-2$. À l'étape $k+1$ décrite ci-dessus, on doit :

— calculer $\|\widetilde{v}_{k+1}\|$, où $\widetilde{v}_{k+1} \in \mathbf{R}^{n-k}$, il y a donc $n-k$ multiplications à faire ;

— calculer $\widetilde{w}_{k+1} = \widetilde{v}_{k+1} - \|\widetilde{v}_{k+1}\|\widetilde{e}_{k+1}$, il n'y a pas de multiplications (il y a seulement une addition pour calculer la première composante) ;

— calculer le produit $H^{(k+1)}A^{(k)}$: $H^{(k+1)}$ est une matrice bloc, on ne touche pas aux k premières colonnes de $A^{(k)}$ dans ce calcul, il s'agit donc de faire un produit de matrices de taille $n-k$, c'est-à-dire $n-k$ calculs de produits du type $\widetilde{H}^{(k+1)}v$ où v est un vecteur de $\mathbf{R}^{n-k}$; on écrit

$$\widetilde{H}^{(k+1)}v = v - 2\frac{\langle v, \widetilde{w}_{k+1}\rangle}{\|\widetilde{w}_{k+1}\|^2}\widetilde{w}_{k+1}.$$

Pour $\|\widetilde{w}_{k+1}\|^2$: $n-k$ multiplications sont nécessaires ; puis pour chaque produit du type $\widetilde{H}^{(k+1)}v$ (il y a $n-k$ telles quantités à calculer) :

— pour $\langle v, \widetilde{w}_{k+1}\rangle$: $n-k$ multiplications sont nécessaires ;

— il y a aussi une division et une multiplication par 2 ;

— un produit réel $\times$ vecteur : $n-k$ multiplications sont nécessaires.

Le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre est donc

$$\begin{aligned} N_{op} &= \sum_{k=0}^{n-2}\Big((n-k) + (n-k) + (n-k)(n-k+2+n-k)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\Big(4(n-k) + 2(n-k)^2\Big) \\ &= \sum_{l=2}^{n}(2l^2+4l) \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$ et $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2} = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ donc $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.

Remarque : si on compte à la fois le nombre de multiplications et d'additions nécessaires comme à l'exercice 6, on obtient $N_{op} \sim \dfrac{4n^3}{3}$. *Cet algorithme est moins coûteux que celui de Gram-Schmidt.*

3. Application. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Étape 1. La première colonne de A est $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\|v_1\| = 1$.

On pose $w_1 = v_1 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $H^{(1)} = H(w_1) = I_3 - 2\dfrac{w_1 w_1^T}{\|w_1\|^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et enfin

$$A^{(1)} = H^{(1)}A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ \uparrow\\ \widetilde{v}_2\end{array}$$

Étape 2. On pose $\widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, on a $\|\widetilde{v}_2\| = \sqrt{2}$.

On pose $\widetilde{w}_2 = \widetilde{v}_2 - \sqrt{2}\widetilde{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. On a $\|\widetilde{w}_2\|^2 = (1-\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2(2-\sqrt{2})$ et on pose $\widetilde{H}^{(2)} = H(\widetilde{w}_2) = I_2 - 2\dfrac{\widetilde{w}_2\widetilde{w}_2^T}{\|\widetilde{w}_2\|^2} = \begin{pmatrix}1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Et là on simplifie ! ! Quand on a des fractions avec des racines carrées, on multiplie par l'expression conjuguée...

Par exemple, $\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient $\widetilde{H}^{(2)} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

On pose donc $H^{(2)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ puis $A^{(2)} = H^{(2)}A^{(1)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

Conclusion : décomposition QR.

La matrice $A^{(2)}$ est triangulaire supérieure, on pose $R = A^{(2)}$. On pose également $Q = H^{(1)}H^{(2)}$: Q est orthogonale comme produit de matrices orthogonales. On a $A^{(2)} = H^{(2)}A^{(1)} = H^{(2)}H^{(1)}A$ donc $A = (H^{(2)}H^{(1)})^{-1}A^{(2)} = (H^{(1)})^{-1}(H^{(2)})^{-1}A^{(2)} = H^{(1)}H^{(2)}A^{(2)} = QR$.

Il reste à calculer $Q = \begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 8

Considérons d'abord le cas de la matrice A. On écrit $A = D - E - F$ (avec les notations du cours, D est diagonale, E est triangulaire inférieure stricte et F est triangulaire supérieure stricte ; attention aux signes). Ici :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La matrice d'itération de Jacobi est $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F)$ donc $\mathcal{J} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_{\mathcal{J}}(X) = \det(\mathcal{J} - XI_3) = -X^3$ donc 0 est la seule valeur propre de $\mathcal{J}$ et $\rho(\mathcal{J}) = 0 < 1$. Ainsi la méthode de Jacobi converge pour la matrice A.

Remarque : la matrice $\mathcal{J}$ est nilpotente ($\mathcal{J}^3 = 0$) donc pour tout vecteur initial, la suite des itérés de la méthode de Jacobi est stationnaire à partir d'un certain rang.

La matrice d'itération de Gauss-Seidel est $\mathcal{G} = (D-E)^{-1}F$.

Il faut d'abord calculer $(D-E)^{-1}$. Pour cela plusieurs méthodes :

- par exemple en résolvant, pour $y \in \mathbf{R}^3$ quelconque, le système triangulaire $(D-E)x = y$, ce qui donne $x = (D-E)^{-1}y$;
- ou encore en remarquant que $D - E = I_3 - E$ avec E nilpotente (elle est triangulaire stricte) ; comme $E^3 = 0$, on a $(I_3 - E)^{-1} = I_3 + E + E^2$;
- avec votre méthode préférée... (algorithme de Gauss ?).

Quelle que soit la méthode choisie, on obtient $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\rho(\mathcal{G}) = 2 > 1$. Ainsi la méthode de Gauss-Seidel diverge pour la matrice A.

Pour la matrice B, on obtient de même

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3,\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{2}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_{\mathcal{J}}(X) = \det(\mathcal{J} - XI_3) = -X(X^2 + \frac{5}{4})$ donc les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sont 0, $i\sqrt{5}/2$ et $-i\sqrt{5}/2$, et $\rho(\mathcal{J}) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$. Ainsi la méthode de Jacobi diverge pour la matrice B.

La matrice d'itération de Gauss-Seidel est $\mathcal{G} = (D-E)^{-1}F$.
Comme précédemment, on calcule $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ puis $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\rho(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} < 1$. Ainsi la méthode de Gauss-Seidel converge pour la matrice B.

Que retenir de ces exemples ? Pour une matrice donnée, la méthode de Jacobi peut converger sans que la méthode de Gauss-Seidel ne converge ; et la méthode de Gauss-Seidel peut converger sans que la méthode de Jacobi ne converge.

Corrigé de l'exercice 9

1. On remarque d'abord que la somme des éléments de chaque ligne de A est la même, elle vaut $1+2a$, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $1+2a$.

   On calcule le polynôme caractéristique de A. On sait qu'on pourra mettre $(X - (1+2a))$ en facteur. Pour obtenir directement cette factorisation, on ajoute à la première colonne les deuxième et troisième colonnes, ce qui ne change pas le déterminant :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & a & a \\ a & 1-X & a \\ a & a & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a-X & a & a \\ 1+2a-X & 1-X & a \\ 1+2a-X & a & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1+2a-X)\left[\begin{vmatrix} 1-X & a \\ a & 1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a \\ a & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ 1-X & a \end{vmatrix}\right] \\
&\qquad \text{en développant par rapport à la première colonne} \\
&= (1+2a-X)(X-(1-a))^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont dont $1+2a$ et $1-a$.

2. La matrice A est symétrique. Elle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

3. Avec les notations du cours, rappelées à l'exercice précédent, on a $A = D - E - F$ et la matrice de l'itération de Jacobi est $J = D^{-1}(E+F)$. On a $D = I_3$, donc $E + F = D - A = I_3 - A$ et $J = I_3 - A$. Ainsi les valeurs propres de J sont $1-(1+2a)$ et $1-(1-a)$, c'est-à-dire $-2a$ et a. Le rayon spectral de J est dont $\rho(J) = 2|a|$. Ainsi la méthode de Jacobi converge si et seulement si $|a| < \frac{1}{2}$.

4. Avec les notations précédentes, la matrice $\mathcal{L}_1$ de l'itération de Gauss-Seidel est
$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F = (I_3 - E)^{-1}F$.

La matrice E est nilpotente, $E^3 = 0$, donc $(I_3 - E)^{-1} = I_3 + E + E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 - a & -a & 1 \end{pmatrix}$ et

$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & a^2 & a^2 - a \\ 0 & -a^3 + a^2 & -a^3 + 2a^2 \end{pmatrix}$

5. Soit $a \geq 0$. On calcule le polynôme caractéristique de $\mathcal{L}_1$:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}_1}(X) &= -X \begin{vmatrix} a^2 - X & a^2 - a \\ -a^3 + a^2 & -a^3 + 2a^2 - X \end{vmatrix} \\ &= -X(X^2 + (a-3)a^2X + a^3) \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme de degré 2 entre parenthèses est $\Delta = a^4(a-3)^2 - 4a^3 = a^3(a-1)^2(a-4)$. Notons μ_1 et μ_2 les racines de ce polynôme (dans $\mathbf{C}$).

Comme a est positif, Δ est du signe de $a-4$.

1^er^ cas : $a \geq 4$.

Alors μ_1 et μ_2 sont réelles, on a $\mu_1 = \frac{-a^2(a-3)-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\mu_2 = \frac{-a^2(a-3)+\sqrt{\Delta}}{2}$.

On a donc $\mu_1 \leq -\frac{a^2(a-3)}{2} \leq -\frac{4^2 \times 1}{2} = -8$. Ainsi, $\rho(\mathcal{L}_1) \geq |\mu_1| \geq 8 > 1$. La méthode de Gauss-Seidel diverge dans ce cas.

2^e^ cas : $0 \leq a < 4$.

Alors μ_1 et μ_2 sont complexes conjuguées, on a $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = \frac{1}{4}\left(a^4(a-3)^2 + |\Delta|\right) = a^3$. Ainsi $|\mu_1| < 1$ et $|\mu_2| < 1$ si et seulement si $0 \leq a < 1$.

En conclusion, dans le cas a positif, la méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $0 \leq a < 1$.

6. Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$, pour comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, on compare les rayons spectraux de J et $\mathcal{L}_1$ (revoir les résultats du cours concernant la convergence des méthodes itératives, l'erreur de convergence, et le lien entre normes matricielles et rayon spectral).

On a $\rho(J) = 2a$ et $\rho(\mathcal{L}_1) = a^{3/2}$. Comme $0 < a < \frac{1}{2} < 4$, on a $a^{1/2} < 2$ et $a^{3/2} < 2a$ donc $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$: la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi dans ce cas.