**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2019-2020

Analyse matricielle-L3

---

**Feuille d'exercices n° 3 - corrigé de l'exercice 1**

---

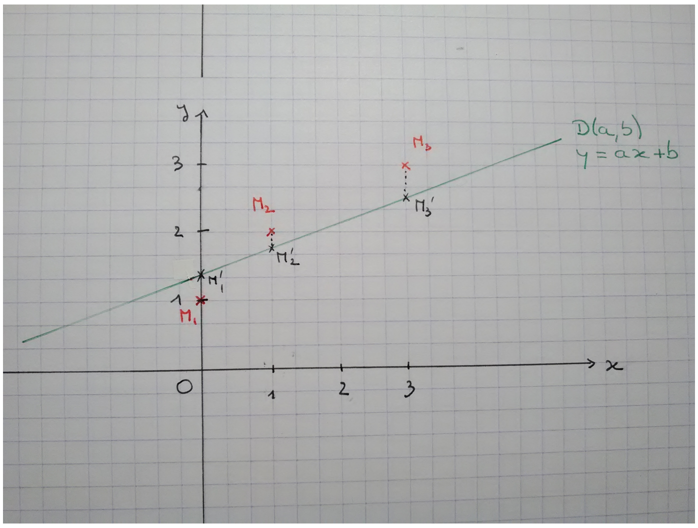
**Corrigé de l'exercice 1**

Notons $M_0$, $M_1$, et $M_2$ les points de coordonnées respectives $(x_0, y_0) = (0,1)$, $(x_1, y_1) = (1,2)$ et $(x_2, y_2) = (3,3)$.

1. Il suffit de représenter dans le plan les trois points $M_0$, $M_1$, et $M_2$ pour voir qu'ils ne sont pas alignés. Il n'existe donc aucune droite d'équation $y = ax + b$ qui contienne ces trois points.
2. Chercher « la droite passant au plus près au sens des moindres carrés » de ces trois points c'est déterminer les coefficients $a$ et $b$ tels que la quantité suivante soit minimale :

$$E(a,b) = (M_1M_1')^2 + (M_2M_2')^2 + (M_3M_3')^2 = (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (3a+b-3)^2,$$

où pour $k = 1, 2, 3$, $M_k'$ est le point situé sur la droite $D(a,b)$ d'équation $y = ax + b$ de même abscisse que $M_k$. On rappelle ici que c'est la manière dont on mesure l'erreur « au sens des moindres carrés » ; c'est une convention.




Les inconnnues du problème sont les réels $a$ et $b$.

Traduisons matriciellement. Le point 1. se traduit par le fait que le système $A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = s$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

n'a **PAS** de solution.

Le point 2. dit qu'on va plutôt chercher une solution du problème d'approximation linéaire aux moindres carrés : on cherche $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\|A\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} - s\|_2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - s\|_2.$$

Vérifiez qu'on a bien $E(a,b) = \left\|A\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - s\right\|_2^2$ avec les notations ci-dessus.

*Vous connaissez plusieurs méthodes pour résoudre ce problème de minimisation. Dans la suite, on présente celle vue en cours d'analyse matricielle en considérant l'équation normale. Vous pouvez aussi réviser un peu vos résultats de calcul différentiel et étudier la fonction* $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On applique le résultat du cours : on sait qu'une solution $(\bar{a}, \bar{b})$ du problème vérifie l'équation normale

$$A^T A \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} = A^T s.$$

L'équation normale à résoudre se simplifie en $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ dont la solution est

$$\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

La droite solution a donc pour équation

$$y = \frac{9}{14}x + \frac{8}{7}.$$

**Remarque** : il existe une formulation statistique de l'approximation au sens des moindres carrés de points par une droite. On peut en effet démontrer que la droite de régression $y = a + bx$ qui approche le mieux au sens des moindres carrés un ensemble de $n$ points $(x_i, y_i)$ du plan est telle que

$$b = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)} \quad \text{et} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

où :

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ est la moyenne arithmétique des $x_i$ ;
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ est la moyenne arithmétique des $y_i$ ;
- $\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ est la variance empirique du vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ ;
- $\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ est la covariance empirique des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$