
Feuille d'exercices n° 3

Moindres carrés, recherche de valeurs propres.

Exercice 1.

Trouver la droite du plan qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points $(0,1)^T$, $(1,2)^T$ et $(3,3)^T$.

Exercice 2. *Approximation polynomiale.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n$.

On souhaite connaître au mieux une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ grâce à n mesures $y_1, \ldots, y_n$ en n points $t_1, \ldots, t_n$. Pour cela on se fixe un degré $d \in \mathbf{N}$ et l'on détermine une approximation de f dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

Notons $\mathcal{P}_d$ cet espace. On cherche $P \in \mathcal{P}_d$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_d} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix} \right\| .$$

1. Écrire le problème comme la résolution au sens des moindres carrés d'un système $A\,x = b$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_{n,d+1}(\mathbf{R})$ et un certain vecteur $b \in \mathbf{R}^n$.
2. Pour $d = 0, 1$, résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
3. On suppose que les points $t_1, \ldots, t_n$ sont deux à deux distincts.
   À quelle condition sur d la matrice A^*A est-elle inversible ?

Exercice 3. *Un calcul par la décomposition QR.*

On définit $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^4$ par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $Ax = b$ au sens des moindres carrés à l'aide d'une décomposition QR obtenue par la méthode de Householder.
2. Quelle est la taille de l'erreur d'approximation ?

Exercice 4. *Théorème de Gerschgorin.*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

Exercice 5. *Méthode de la puissance.*
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les modes propres de A.
2. Soit $x \in \mathbf{C}^2$ non nul.
   (a) Calculer $(A^k x)_{k \in \mathbf{N}}$.
   (b) On pose $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}} = \left(\frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right)_{k \in \mathbf{N}}$. À quelle condition sur x la suite

   $$\left(\left\langle Ax^{(k)}, x^{(k)} \right\rangle \right)_{k \in \mathbf{N}}$$

   converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 6. *Méthode QR.*
Calculer les itérations successives de la méthode QR de recherche de valeurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qu'en conclure ?