LE PROGRAMME DE SARKISOV EN 10 EXERCICES

STÉPHANE LAMY

1. Enoncé

On se propose de donner une rédaction de la preuve du programme de Sarkisov, en suivant Corti [1] et Matsuki [2] pour les arguments (mais pas pour la présentation).

Le programme de Sarkisov s'intéresse à l'étude des transformations birationnelles $X/S \dashrightarrow X'/S'$ entre fibrations de Mori. On distingue 4 types élémentaires de telles transformations, dits "liens élémentaires" :

type I
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[ld] \arrow[r, dashed] & X' \arrow[dd] \\ X \arrow[d] & & \\ S & & S' \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

type II
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[ld] \arrow[r, dashed] & Z' \arrow[rd] & \\ X \arrow[rd] & & & X' \arrow[lld] \\ & S & & \end{tikzcd}$$

type III
$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd] \arrow[r, dashed] & Z' \arrow[rd] & \\ & & X' \arrow[d] \\ S \arrow[rr] & & S' \end{tikzcd}$$

type IV
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[rr, dashed] & & X' \arrow[d] \\ S \arrow[rd] & & S' \arrow[ld] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Dans ces diagrammes les tirets $---$ correspondent à des suites finies de log-flips (flips, flops et anti-flips); les flèches pleines à des morphismes et plus précisément : $Z \to X$ et $Z' \to X'$ sont des contractions divisorielles, $X \to S$ et $X' \to S'$ sont des fibrations de Mori. Concernant $S \to S'$, $S' \to S$, $S \to T$ et $S' \to T$ on suppose simplement que le nombre de Picard relatif est 1.

Théorème 1 (Programme de Sarkisov)**.** *Toute transformation birationnelle $X/S \dashrightarrow X'/S'$ entre fibrations de Mori de dimension 3 s'écrit comme une composition finie de liens élémentaires.*

2. Définitions basiques et plan de la preuve

Soit $f : X/S \dashrightarrow X'/S'$ une transformation birationnelle entre deux fibrations de Mori de dimension 3 (en particulier : $\mathbb{Q}$ factorielles, à singularités au plus terminales). On note K_X (resp. $K_{X'}$ ...) un diviseur canonique sur X. On choisit une fois pour toute un diviseur ample $H_{X'}$ sur X', et on note H_X le transformé strict ("homaloïdal") sur X d'un élément général du système linéaire $|H_{X'}|$. On note μ' le rationnel tel que $K_{X'} + \frac{1}{\mu'}H_{X'}$ soit φ'-trivial, où $\varphi' : X' \to S'$ est la fibration de Mori sur X'. On peut supposer que $K_{X'} + \frac{1}{\mu'}H_{X'}$ est le pull-back d'un diviseur ample par φ', et donc en particulier que c'est un diviseur nef qui intersecte strictement positivement toute courbe non contractée par φ'. Dans le cas $X' = \mathbb{P}^3$ on peut prendre $H_{X'}$ égal à un hyperplan, on a alors $\mu' = \frac{1}{4}$ et $K_{X'} + \frac{1}{\mu'}H_{X'} \equiv 0$.

Définition du degré μ. On définit le degré μ de f relativement à la fibration de Mori sur X comme $H_X.C$ pondéré par $K_X.C$, où C est une courbe contractée par la fibration. Précisément :

$$\mu = \frac{H_X.C}{-K_X.C}.$$

Autrement dit on choisit μ tel que $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ soit f-trivial, remarquons que

$$t > \mu \Longleftrightarrow \left(K_X + \frac{1}{t}H_X\right).C < 0. \tag{2.1}$$

Une remarque moins immédiate (exercice 1) est que $\mu \geq \mu'$, et l'égalité implique que f respecte les structures de fibration de Mori sur X et X' (cette remarque n'est guère pertinente quand $X' = \mathbb{P}^3$!).

Définition de la multiplicité maximale λ. Considérons une résolution de f par une suite d'éclatements π :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & X' \end{tikzcd}$$

On pose $K_M = \pi^*K_X + \sum c_i E_i$, $H_M = \pi^*H_X - \sum m_i E_i$, d'où

$$K_M + \frac{1}{t}H_M = \pi^*\left(K_X + \frac{1}{t}H_X\right) + \sum\left(c_i - \frac{m_i}{t}\right)E_i.$$

Ces derniers coefficients sont positifs si $t \geq \frac{m_i}{c_i}$. On pose

$$\lambda_i = \frac{m_i}{c_i} \text{ et } \lambda = \max \lambda_i.$$

On remarque que

$$t > \lambda \Longleftrightarrow K_M + \frac{1}{t}H_M = \pi^*\left(K_X + \frac{1}{t}H_X\right) + \sum \underbrace{\left(c_i - \frac{m_i}{t}\right)}_{\text{tous } >0} E_i. \tag{2.2}$$

Stratégie de preuve. La preuve consiste à chercher à faire baisser, à l'aide d'un lien de type I à IV, le couple (μ, λ) ordonné par ordre lexicographique. On distingue deux cas qui se traitent de façon complètement différente :

cas $\lambda > \mu$: dans ce cas on va construire un lien de type I ou II;
cas $\lambda \leq \mu$: dans ce cas on va construire un lien de type III ou IV.

Même en sachant qu'on peut faire baisser (μ, λ), le problème de la terminaison de l'algorithme est non trivial. Il y a ici deux ingrédients "sophistiqués" :

- Montrer que μ vit dans un ensemble discret revient à borner son dénominateur $-K_X.C$; ceci est facile (?) quand on a une fibration en coniques ou surfaces del Pezzo, mais c'est un résultat difficile (?) de Kawamata quand le nombre de Picard de X est 1.
- Le fait qu'il n'existe pas de suite infinie de liens de type II avec μ constant se traite de façon subtile. Dans ce cas il existerait une suite décroissante de λ avec point d'accumulation, ce qui ne semble pas facile à exclure directement; par contre si l'on définit la log-multiplicité maximale $\bar{\lambda}$ comme le max des $\frac{m_i}{c_i+1}$ on peut utiliser le résultat suivant

d'Alexeev pour conclure (exercice 2) (le lemme est d'habitude énoncé en fonction du seuil log-canonique $1/\bar{\lambda}$).

Lemme 2 (Alexeev, difficile ?)**.** *Toute suite décroissante de log-multiplicités maximales converge vers 0.*

Par ailleurs, au cours de la preuve on construit des variétés à l'aide de certains log MMP, pourtant on reste à singularités au plus terminales grâce à la

Proposition 1. *Soit $M \to X$ un morphisme, et Y le résultat d'un $K + \frac{1}{t}H$ MMP à partir de M. Si $t \geq \lambda$ alors Y est encore à singularités terminales .*

La preuve est l'exercice 3.

3. CAS $\lambda > \mu$

3.1. **Construction d'une extraction maximale.** On commence par construire un morphisme birationnel $Z \to X$ avec lieu exceptionnel irréductible E qui réalise la multiplicité maximale λ (exercice 4).

3.2. **Construction du lien (type I ou II).** On a donc deux morphismes : $Z \to X$ qui est l'extraction maximale, et $X \to S$ qui est la fibration de Mori. On fait maintenant un $K + \frac{1}{\lambda}H$ MMP à partir de Z relativement à S. Soit C une courbe générale contenue dans une fibre de $X \to S$ (on peut la considérer comme une courbe sur Z); remarquons (exercice 5) qu'après une (éventuelle) série de log-flips puis une (éventuelle) contraction divisorielle le transformé strict de C est $K + \frac{1}{\lambda}H$ négatif, en particulier ce log MMP doit finir par produire une structure de fibration de Mori X_1 (relativement à $K + \frac{1}{\lambda}H$, et donc aussi à K)[1]. Suivant que le log MMP comporte une contraction divisorielle ou pas, on a un lien de type II ou I. Reste à voir que l'on a simplifié la situation... On note (μ_1, λ_1) le degré et la multiplicité maximale sur X_1.

3.3. **Vérification que (μ, λ) baisse.** D'une part : $\mu_1 \leq \mu$. On prend C une courbe générale (i.e, ne rencontrant pas le lieu de base de $X_1 \dashrightarrow Z$), on peut donc la considérer aussi comme une courbe sur Z, et on note D la projection de C sur X, c'est une courbe contractée par la fibration de Mori sur X (cela vient du fait qu'on a fait du MMP relatif à S). On a :

$$0 = \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right).D = \left(K_Z + \frac{1}{\mu}H_Z + bE\right).C \geq \left(K_Z + \frac{1}{\mu}H_Z\right).C = \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right).C.$$

On a donc $\mu_1 \leq \mu$ avec égalité ssi $E.C = 0$. Précisément on a $E.C > 0$ (et donc $\mu_1 < \mu$) exactement dans les deux cas suivants : $X \to pt$ est une fibration vers un point, ou $X \to S$ est une fibration vers une courbe et E s'obtient en éclatant une courbe transverse à la fibration.

D'autre part : $\lambda_1 \leq \lambda$. Sur Z il est clair que $\lambda_Z \leq \lambda$. Pour traiter le cas d'égalité on introduit le nombre e de diviseurs réalisant la multiplicité maximale λ. Ce nombre e est indépendant de la résolution choisie : si M_1 et M_2 sont deux résolutions, on les chapeaute par une résolution M, et on vérifie que les éclatements pour construire M correspondent à des diviseurs E_i

[1]NB : ici le fait qu'il n'y a pas une suite infinie de log flips est peut-être élémentaire : si $X \to S$ est une fibration en surfaces del Pezzo et que l'extraction maximale avait lieu dans une fibre S, chaque flip fera chuter $\rho(S)$ (??), si $X \to S$ est une fibration en coniques et que $Z \to X$ est centré en un point p, le seul flip possible est celui de la fibre contenant p, etc...

avec $\lambda_i < \lambda$ (en fait m_i reste constant alors que c_i augmente). Si $\lambda_Z = \lambda$ on a $e_Z \leq e - 1$. Ensuite le $K + \frac{1}{\lambda}H$ MMP ne produit que des E_i avec $\lambda_i < \lambda$ (exercice 3), et donc $\lambda_1 = \lambda_Z, e_1 \leq e-1$.

Conclusion : le couple (μ, λ) ordonné par ordre lexicographique diminue après un tel lien de type I ou II; dans le cas où il y a "patinage", c'est-à-dire si $(\mu_1, \lambda_1) = (\mu, \lambda)$, on remarque que l'entier e a diminué et donc après un nombre fini de liens de type I ou II on fait baisser strictement (μ, λ).

4. CAS $\lambda \leq \mu$ ET $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ NON NEF

4.1. **Mise en place du "2-rays game".** Dans le cône $\mathrm{NE}(X)$ on a un rayon extrémal R qui correspond à la structure de fibration de Mori $X \to S$, et qui est situé sur l'hyperplan $K_X + \frac{1}{\mu}H_X = 0$. Par hypothèse il existe au moins un rayon extrémal P dans le demi-espace $K_X + \frac{1}{\mu}H_X < 0$, et on peut choisir P de telle façon que les rayons R, P engendrent une face de $\mathrm{NE}(X)$. On note $X \to T$ la contraction de cette face, et on réalise un $K + \frac{1}{\mu}H$ MMP relativement à T. Par la proposition 1 on sait que la variété ainsi obtenue est encore à singularités terminales.

4.2. **Construction du lien (type III ou IV).** Premier cas : le $K + \frac{1}{\mu}H$ MMP finit par produire une log-fibration de Mori X_1. Comme $H_{X_1}.C > 0$ pour une courbe générale dans une fibre de cette fibration, X_1 est aussi une K fibration de Mori; ainsi le passage de X à X_1 est un lien de type III ou IV. De plus $K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}.C < 0$, donc $\mu_1 < \mu$.

Deuxième cas : le $K + \frac{1}{\mu}H$ MMP finit par produire un log-modèle minimal relatif X_1. Ici Corti donne un argument qui exclut la possibilité d'un lien de type IV, et qui n'est pas reprit par Matsuki (exercice 6). En conséquence on a réalisé un lien de type III, et le nombre de Picard de X_1 relativement à T est 1. Soit C une courbe générale dans une fibre de $X_1 \to T$, on a

$$0 \geq \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right).C = \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right).C \geq 0 \Rightarrow \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right).C = 0.$$

Or $H_{X_1}.C > 0$, donc $K_{X_1}.C < 0$ et donc X_1 est une K fibration de Mori. Par ailleurs l'égalité $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right).C = 0$ équivaut à $\mu_1 = \mu$. Comme on a réalisé un $K + \frac{1}{\mu}H$ MMP pour construire X_1, les éventuelles singularités introduites satisfont toutes $\lambda_i \leq \mu$, on est donc toujours dans le cas $\lambda \leq \mu$ (ici λ a peut-être augmenté, mais reste borné par μ).

Conclusion : à l'issue du deuxième cas on "patine", au sens où $(\mu, \lambda) = (\mu_1, \lambda_1)$; on peut cependant appliquer de nouveau un "2 rays game", et il est impossible de retomber une infinité de fois dans ce deuxième cas car chaque lien de type III fait chûter d'un le nombre de Picard. Ainsi on finit par être dans le premier cas, et μ baisse strictement.

5. CAS $\lambda \leq \mu$ ET $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ NEF

Dans ce cas nous montrons que f est un isomorphisme; c'est le critère de Noether-Fano-Iskovskikh.

La preuve utilise l'astuce technique appelée lemme de négativité :

Lemme 3. *Soit $g : W \to X$ un morphisme birationnel. Soit $\sum a_i E_i$ un diviseur à support dans le lieu exceptionnel de g et supposons qu'on ait une équivalence numérique*

$$\sum a_i E_i \equiv g\text{-nef} + g\text{-effectif}.$$

Alors pour tout i on a $a_i \leq 0$.

g-nef signifie d'intersection positive avec les courbes du lieu exceptionnel, g-effectif signifie effectif et à support hors du lieu exceptionnel. La preuve se ramène au cas des surfaces en tranchant par des sections hyperplanes; dans ce cas g-effectif implique g-nef et le lemme est alors une conséquence facile du fait que la forme d'intersection est définie négative sur le lieu exceptionnel (exercice 7).

Voici une conséquence directe de ce lemme de négativité ([1, prop (2.7)]). Un point de vocabulaire : on dit que g est non contractante[2] si l'image par g de toute surface $S \subset X$ est encore une surface. On dit que g est un isomorphisme en codimension 1 si g et g^{-1} sont toutes deux non contractantes.

Proposition 2. *Soit $g : X \dashrightarrow X'$ une transformation birationnelle, isomorphisme en codimension 1, entre deux variétés $\mathbb{Q}$-factorielles. On suppose qu'il existe des diviseurs amples $H \subset X, H' \subset X'$ tels que $g_* H = H'$. Alors g est un isomorphisme.*

La preuve est l'exercice 8. Dans le cas de la dimension 3, on peut en déduire le critère d'isomorphisme suivant ([1, prop (3.5)]).

Proposition 3. *Soit $g : X/S \dashrightarrow X'/S'$ un isomorphisme en codimension 1 entre deux fibrations de Mori de dimension 3. Si g respecte les structures de fibrations de Mori sur X et X', alors g est un isomorphisme.*

La preuve consiste à construire des diviseurs amples H et H' permettant d'appliquer la proposition précédente (exercice 9).

Nous pouvons maintenant montrer le critère de Noether-Fano-Iskovskikh :

Proposition 4. *Si $\lambda \leq \mu$ et si $K_X + \frac{1}{\mu} H_X$ est nef, alors f est un isomorphisme.*

Preuve.

Etape 1 : on montre que $\mu = \mu'$.

Il suffit de montrer $\mu \leq \mu'$, puisqu'on a déjà l'inégalité inverse. On considère une résolution

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & X' \end{tikzcd}$$

On note E_i les diviseurs exceptionnels de π, E'_j ceux de σ, et on écrit les formules de ramification

$$K_M + \frac{1}{\mu} H_M = \pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) + \sum \left(c_k - \frac{m_k}{\mu} \right) E_k = \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) + \sum r'_j E'_j. \tag{5.1}$$

[2]existe-t-il un terme standard pour cette notion ?

En particulier :

$$\mathsf{nef} + \sum \left(c_k - \frac{m_k}{\mu} \right) E_k = \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) + \sum r'_j E'_j .$$

L'hypothèse $\lambda \leq \mu$ nous assure que tous les coefficients $c_k - \frac{m_k}{\mu}$ sont positifs. Si D est une courbe générique contenue dans une fibre de la fibration de Mori sur X' on calcule :

$$\begin{aligned}
\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) .D &= \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) .D \\
&= \left(\sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) + \sum r'_j E'_j \right) .D \\
&= \left(\mathsf{nef} + \sum \left(c_k - \frac{m_k}{\mu} \right) E_k \right) .D \geq 0.
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\mu' \geq \mu$.

Etape 2 : on montre que f est un isomorphisme en codimension 1.

On reprend les formules de ramification (5.1), que l'on écrit sous la forme suivante (les sommes se font sur les diviseurs exceptionnels seulement pour π, seulement pour σ, ou pour les deux à la fois)

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \text{ exc}} r_k E_k + \sum_{\pi,\sigma \text{ exc}} (r_k - r'_k) E_k &= \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) - \pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H \right) + \sum_{\sigma \text{ exc}} r'_j E'_j \\
&= \mathsf{nef} + \pi\text{-}\mathsf{trivial} + \pi\text{-}\mathsf{effectif} \\
&= \pi\text{-}\mathsf{nef} + \pi\text{-}\mathsf{effectif}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \text{ exc}} r'_j E_j + \sum_{\pi,\sigma \text{ exc}} (r'_j - r_j) E_j &= \pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H \right) - \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) + \sum_{\pi \text{ exc}} r_k E_k \\
&= \mathsf{nef} + \sigma\text{-}\mathsf{trivial} + \sigma\text{-}\mathsf{effectif} \\
&= \sigma\text{-}\mathsf{nef} + \sigma\text{-}\mathsf{effectif}.
\end{aligned}$$

Le lemme de négativité nous dit que $r_k = r'_k$ pour les diviseurs qui sont à la fois π et σ exceptionnels; et qu'il n'y a aucun diviseurs E'_j qui ne soit pas aussi π exceptionnel (car on sait que les $r'_j > 0$, cela vient de X' à singularités terminales). En particulier f est non contractante; on remarque que l'hypothèse $\lambda \leq \mu$ n'a pas servi à partir du moment où l'on a obtenu $\mu = \mu'$. On isole ce résultat dans la proposition 5 ci-dessous pour future référence.

Il s'agit à présent de montrer que f^{-1} est non contractante... C'est évident au moins dans le cas $X' = \mathbb{P}^3$, puisque $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^3) = \mathbb{Z}$. Je laisse le cas général en exercice... sans solution !

Conclusion : L'étape 1 assure que f respecte les structures de fibrations de Mori (exercice 1), et l'étape 2 permet alors d'appliquer la proposition 3. □

On peut isoler la deuxième étape de la preuve en la proposition suivante :

Proposition 5. *Si $f : X \dashrightarrow X'$ satisfait $\mu = \mu'$ et que $K_X + \frac{1}{\mu} H_X$ est nef, alors f est non contractante.*

6. Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1. **On cherche à montrer qu'on a toujours $\mu \geq \mu'$, et à caractériser le cas d'égalité.** Considérons une résolution de f

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & X' \end{tikzcd}$$

On note E'_k les diviseurs exceptionnels produits par la suite σ. On a

$$K_M + \frac{1}{\mu'} H_M = \pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X \right) + \pi\text{-exceptionnel} = \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} H_{X'} \right) + \sum a_k E'_k.$$

où les a_k viennent de la formule $K_M = \sigma^* K_{X'} + \sum a_k E'_k$ et sont donc strictement positifs. En particulier, en se rappelant que par définition de μ' on a $K_{X'} + \frac{1}{\mu'} H_{X'}$ nef :

$$\pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X \right) = \mathsf{nef} + \sum a_k E'_k - \pi\text{-exceptionnel}.$$

Maintenant soit $C \subset X$ une courbe contenue dans une fibre de la fibration de Mori, qui ne passe par aucun point d'indétermination de f (ce qui permet de l'identifier à une courbe de M) et qui ne soit contenue dans aucun des E'_k (ce qui assure $E'_k.C \geq 0$). On calcule :

$$\begin{aligned} \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X \right).C &= \pi^* \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X \right).C \\ &= \left(\mathsf{nef} + \sum a_k E'_k - \pi\text{-exceptionnel} \right).C \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que $\mu \geq \mu'$. On a $\mu = \mu'$ ssi $\left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X \right).C = 0$, en particulier on doit avoir $0 = \sigma^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} H_{X'} \right).C = \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} H_{X'} \right).\sigma(C)$ ce qui implique que $\sigma(C) = f(C)$ est contenue dans une fibre de la fibration de Mori sur X'. Noter que ce résultat est vide quand $X' = \mathbb{P}^3$!

Solution de l'exercice 2. **On cherche à montrer qu'il n'existe pas de suite infinie de liens de type II avec μ constant.** Supposons qu'on ait une telle suite infinie :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z_1 \arrow[dl] \arrow[r, dashed] & Z'_1 \arrow[dr] & & Z_2 \arrow[dl] \arrow[r, dashed] & Z'_2 \arrow[dr] & & & & Z_k \arrow[dl] \arrow[r, dashed] & Z'_k \arrow[dr] & & \\ X = X_1 & & & X_2 & & & X_3 & \cdots & X_k & & & X_{k+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

On note $\lambda(X_k)$ la multiplicité maximale sur X_k, et $\bar{\lambda}(X_k)$ la log-multiplicité maximale. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer :

- la suite des $\lambda(X_k)$ est strictement décroissante vers une limite $\alpha \geq \mu > 0$;
- pour tout k on a $\alpha > \bar{\lambda}(X_k)$ (sinon on viendrait contredire le lemme d'Alexeev).

Rappelons que dans la formule de ramification

$$K_M + \frac{1}{t} H_M = \pi^* \left(K_X + \frac{1}{t} H_X \right) + \sum \left(c_i - \frac{m_i}{t} \right) E_i.$$

$t = \lambda$ est le seuil à partir duquel les coefficients des E_i sont ≥ 0, et $t = \bar{\lambda}$ est le seuil à partir duquel les coefficients sont ≥ -1. Comme $\lambda > \alpha > \bar{\lambda}$, pour $t = \alpha$ il peut exister un certains nombres de E_i à coefficients dans $]-1,0[$; cependant il ne peut y en avoir qu'un nombre fini (les compter sur une résolution donnée, et constater que rajouter des éclatements ne produit que des diviseurs avec coefficients positifs). Reste à constater que chaque diviseur d'une extraction maximale $Z_i \to X_i$ correspond à un diviseur sur X_i avec coefficients dans $]-1,0[$, et en fait aussi sur X_1 ce qui donnera la contradiction attendue. Pour cela on montre que chaque log-flips (disons dans la séquence $Z_k - - - Z'_k$ est un $K + \frac{1}{\alpha}H$ flip. Par construction sur chacune des variétés dans cette suite de log-flips il y a deux rayons extrémaux au-dessus de S_k, l'un qui est $K + \frac{1}{\lambda}H$ positif et l'autre (donnée par la courbe flippée) strictement négatif. Comme $\mu \leq \alpha < \lambda$, et que les courbes générales provenant de X_k/S_k sont $K + \frac{1}{\mu}H = 0$ et donc $K + \frac{1}{\alpha}H \leq 0$, on en déduit que la courbe flippée est aussi $K + \frac{1}{\alpha}H < 0$. Dernier point à éclaircir : si ν est une valuation divisorielle, on en déduit $a(\nu; Z_k, \alpha H) \leq a(\nu; Z'_k, \alpha H) \leq a(\nu; X_{k+1}, \alpha H)$, mais comment obtenir $a(\nu; X_k, \alpha H) \leq a(\nu; X_{k+1}, \alpha H)$?

Solution de l'exercice 3. **On cherche à montrer qu'un $K + \frac{1}{t}H$ MMP ne produit que des singularités terminales, sous l'hypothèse $t \geq \lambda$.** Il s'agit de contrôler ce qui se passe pour les deux types d'opérations, contractions divisorielles et log flips :

- Pour les contractions divisorielles : comme H est mobile une contraction divisorielle $K + \frac{1}{t}H$ négative est aussi une contraction K négative, donc ne peut créer qu'une singularité terminale. Comme la log-discrépance doit être strictement positive la multiplicité λ_i associée au diviseur contracté E_i vérifie $\lambda_i < t$.
- Pour les log flips : il y a une difficulté quand on a un log flip qui n'est pas un flip, ce qui peut arriver si la courbe flippée est d'intersection négative avec H. Dans ce cas la courbe flippée C est contenue dans H. On considère une résolution du log flip

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ C \subset X \arrow[rr, dashed] & & C^+ \subset X^+ \end{tikzcd}$$

et on écrit diverses formules de ramification (E est un diviseur sur M, exceptionnel pour π et σ) :

$$\begin{aligned} K_M &= \sigma^* K_{X^+} + aE + \cdots \\ K_M + \frac{1}{t}H_M &= \sigma^*\left(K_{X^+} + \frac{1}{t}H_{X^+}\right) + bE + \cdots \\ K_M + \frac{1}{t}H_M &= \pi^*\left(K_X + \frac{1}{t}H_X\right) + cE + \cdots \end{aligned}$$

on a $a \geq b$ car H_{X^+} est effectif, $b > c$ car la log discrépance augmente (strictement ???) au cours d'un log-flip (exercice 10), et $c \geq 0$ car $t \geq \lambda$. Finalement $a > 0$, et ceci pour tout E, ce qui revient à dire que X^+ est à singularités terminales.

Solution de l'exercice 4. **On cherche à construire une extraction maximale.** Soit $\pi : M \to X$ la résolution de f, produisant des diviseurs E_i, $i = 1, \cdots, n$. Quitte à ne pas faire les derniers éclatements on peut supposer que E_n est l'unique diviseur réalisant la multiplicité maximale λ

($\pi : M \to X$ n'est éventuellement plus une résolution de f, mais ce n'est pas un problème). On fait alors un $K + \frac{1}{\lambda}H$ MMP à partir de M relativement à X, ce qui aboutit forcément à un log-modèle minimal relatif Z' (le cas log-fibration de Mori est exclu car on ne s'autorise à contracter que des courbes contractées par π, et celles ci ne recouvrent pas M). La formule de ramification $K_M + \frac{1}{\lambda}H_M = \pi^*\left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right) + \sum a_i E_i$ montre que les seuls diviseurs susceptibles d'être contractés sont les $E_i, i = 1, \cdots, n-1$ (comme $a_n = 0$, la contraction de E_n ne donnerait pas lieu à une singularité terminale). D'autre part en écrivant la formule analogue sur Z' sous la forme

$$\sum a_i E_i = K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'} - \pi'^*\left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right) = \pi'\text{-nef} - \pi'\text{-trivial} = \pi'\text{-nef}$$

on voit (lemme de négativité) que le seul E_i pouvant être un diviseur exceptionnel du morphisme $\pi' : Z' \to X$ est E_n (car $a_n = 0$, alors que pour $i \leq n-1$ on a $a_i > 0$). Finalement on applique le K MMP sur Z' relativement à X pour obtenir (après une éventuelle suite de flips) une contraction divisorielle $Z \to X$ de diviseur exceptionnel E_n, qui est l'extraction maximale attendue.

Solution de l'exercice 5. **On cherche à montrer que le $K + \frac{1}{\lambda}H$ MMP appliqué à Z finit par aboutir sur une (log) fibration de Mori.** Il s'agit de montrer que l'on ne peut aboutir à un log-modèle minimal. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[r, dashed] \arrow[dl] & Z' \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[d] & & & X_1 \\ S & & & \end{tikzcd}$$

où $Z \dashrightarrow Z'$ est une (éventuelle) suite de log flips et $Z' \xrightarrow{q} X_1$ est une (éventuelle) contraction divisorielle. On choisit une courbe générale dans une fibre de X/S, on peut donc voir C comme une courbe sur Z ou Z'. On a

$$0 = \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right).C > \left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right).C = \left(K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'}\right).C > K_{Z'}.C$$

Donc Z' est couverte par des courbes $K + \frac{1}{\lambda}H$ négatives (qui sont aussi K négatives) : ceci termine la preuve si on a un lien de type I. De plus

$$\left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right).q_*C = \left(K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'} - aE\right).C$$

où E est le diviseur exceptionnel de q et $a > 0$. Donc à nouveau $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right).q_*C < 0$, et X_1 est aussi couverte par des courbes K négatives.

Solution de l'exercice 6. **On cherche à montrer qu'un $K + \frac{1}{\mu}H$ MMP au-dessus de T aboutissant à un log modèle minimal X_1 ne peut pas être de type IV.** Tout d'abord, X_1 est une fibration de Mori : en effet $K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}$ ne peut pas être trivial au-dessus de T (sinon ce serait aussi le cas sur X), donc parmi les deux rayons extrémaux il y en a un $K + \frac{1}{\mu}H$ trivial (correspondant à une courbe générale dans X/S) et un $K + \frac{1}{\mu}H$ strictement positif. Quitte à considérer $K + \frac{1}{\mu+\varepsilon}H$, la courbe générale de X/S correspond au seul rayon strictement négatif, qui donne la fibration de Mori attendue.

D'autre part, dans la suite $X \to S \to T$, le morphisme $S \to T$ est forcément un morphisme birationnel entre surfaces : si c'était une fibration, X serait couvert par des courbes $K + \frac{1}{\mu}H$ négatives, et donc X_1 aussi; ceci contredirait l'hypothèse que X_1 est un log-modèle minimal. Finalement le passage de X à X_1 est un isomorphisme en codimension 1 (suite de log-flips) qui préserve la structure de fibration de Mori : c'est impossible par la proposition 3.

Solution de l'exercice 7. **Lemme de négativité en dimension 2:** On a donc $g : W \to X$ un morphisme birationnel entre surfaces, et $\sum a_i E_i$ un diviseur à support dans le lieu exceptionnel qui est g-nef (en effet en dimension 2 un diviseur g-effectif est g-nef). Supposons que $a_i > 0$ pour au moins un i, alors la matrice d'intersection étant définie négative sur le lieu exceptionnel on a

$$0 \leq \left(\sum aiE_i\right) . \left(\sum_{a_i>0} aiE_i\right) = \left(\sum_{a_i \leq 0} aiE_i\right) . \left(\sum_{a_i>0} aiE_i\right) + \left(\sum_{a_i>0} aiE_i\right)^2 < 0$$

ce qui est absurde !

Lemme de négativité en dimension 3: Soit E_j un diviseur du lieu exceptionnel; on distingue deux cas. Si $g(E_j)$ est un point, on applique le lemme pour les surfaces à $g : H \to f(H)$, où H est une section hyperplane générale de W. Si $g(E_j)$ est une courbe, on applique le lemme à $g : g^{-1}(H_X) \to H_X$ où H_X est une section hyperplane générale de X. On montre ainsi $a_j \leq 0$, et ceci pour tout j.

Lemme de négativité en dimension plus grande: similaire (voir Matsuki).

Solution de l'exercice 8. (je recopie la preuve de Corti) Soit $X \xleftarrow{p} W \xrightarrow{q} X'$ une résolution de g. Comme g est un isomorphisme en codimension 1 les morphismes p et q ont mêmes diviseurs exceptionnels E_i. Il existe des a_i tels que

$$\begin{array}{rcl} a_iE_i = -p^*H & + & q^*H_{X'} \\ p\text{-nef} & + & p\text{-effectif} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} -a_iE_i = -q^*H_{X'} & + & p^*H \\ q\text{-nef} & + & q\text{-effectif} \end{array}$$

Par le lemme de négativité les a_i sont nuls d'où $p^*H = q^*H_{X'}$. Si $C \subset W$ est une courbe telle que $q(C)$ soit un point, il s'agit de montrer que $p(C)$ est aussi un point. On a

$$0 = q(C).H_{X'} = C.q^*H_{X'} = C.p^*H = p(C).H$$

donc $p(C)$ est un point, car H est ample.

NB : on a en fait montré, en utilisant seulement $H_{X'}$ nef, que g^{-1} est un morphisme. Si $H_{X'}$ est ample, on peut répéter l'argument en échangeant les rôles de H et $H_{X'}$ et montrer que g est aussi un morphisme.

Solution de l'exercice 9. (détails dans Corti) Par hypothèse on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ S \arrow[r, dashed] & S' \end{tikzcd}$$

On choisit δ' très ample sur S', que l'on relève en des diviseurs nef D, D' sur X et X'. On choisit H ample sur X, et on pose $H_{X'} = g_*H$, c'est un diviseur ample relativement à S'. On constate alors que pour $0 < \varepsilon \ll 1$ les diviseurs $D + \varepsilon H$ et $D' + \varepsilon H_{X'}$ sont amples et que $g_*^{-1}(D' + \varepsilon H_{X'}) = D + \varepsilon H$. On applique alors la proposition 2.

Solution de l'exercice 10. **On cherche à montrer que la (log) discrépance augmente au cours d'un (log) flip.** On considère une résolution d'un $K + \frac{1}{t}H$ flip :

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ C \subset X \arrow[rr, dashed] & & C^+ \subset X^+ \end{tikzcd}$$

Les diviseurs exceptionnels pour p sont exactement les diviseurs exceptionnels pour q; on les note E_i. On écrit les formules de ramification

$$\begin{aligned} K_W + \frac{1}{t}H_W &= p^*\left(K_X + \frac{1}{t}H_X\right) + \sum a_i E_i \\ K_W + \frac{1}{t}H_W &= q^*\left(K_{X^+} + \frac{1}{t}H_{X^+}\right) + \sum b_i E_i \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\sum(a_i - b_i) = q^*\left(K_{X^+} + \frac{1}{t}H_{X^+}\right) + p^*\left(-K_X - \frac{1}{t}H_X\right)$$

Or le diviseur de droite est q-nef (ou ce qui revient au même p-nef), car $\left(K_{X^+} + \frac{1}{t}H_{X^+}\right).C^+ > 0$ et $\left(-K_X - \frac{1}{t}H_X\right).C > 0$. Le lemme de négativité donne $a_i \leq b_i$, ce qu'on voulait.

References

1. Alessio Corti, *Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 223–254. MR MR1311348 (96c:14013)
2. Kenji Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR MR1875410 (2002m:14011)