

# TURBULENCE DE BURGERS EN 1D : UN CAS MODÈLE POUR LA THÉORIE DE KOLMOGOROV

ALEXANDRE BORITCHEV

## RÉSUMÉ

Nous nous intéressons ici à la turbulence de Burgers 1D, ou “Burgulence”. Nous présentons des résultats valables pour l’équation de Burgers généralisée périodique stochastique 1D:

$$u_t + f'(u)u_x = \nu u_{xx} + \eta, \quad t \geq 0, \quad x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

où  $\eta(t, x)$  est une force de type bruit blanc en  $t$  et lisse en  $x$ . Plus précisément, nous estimons les normes de Sobolev et les quantités à petite échelle analogues à celles qui sont intéressantes pour l’étude de la turbulence hydrodynamique, telles que les incréments et le spectre d’énergie. Les résultats exposés ici se trouvent dans l’article [7].

### 1. LA THÉORIE DE KOLMOGOROV ET L’INTERMITTENCE

Les équations de Navier-Stokes 3D décrivant le comportement des fluides incompressibles s’écrivent de la façon suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \eta; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{NSE})$$

Ici,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  désigne la vitesse et  $p(t, \mathbf{x})$  la pression. La constante  $\nu$ ,  $0 < \nu \ll 1$ , correspond à un coefficient de viscosité constant. Finalement,  $\eta(t, \mathbf{x})$  est une force aléatoire, lisse en la variable  $\mathbf{x}$ .

Le problème de l’existence et de l’unicité des solutions de (NSE) est extrêmement complexe. Ici, nous ne parlerons pas de la théorie rigoureuse de ces solutions, mais de la théorie heuristique du comportement statistique de  $\mathbf{u}$  lorsque  $\nu$  varie, tous les autres paramètres étant fixés. Ces solutions possèdent différents types de structure: pour les caractériser, il convient d’introduire la notion d’échelle.

Dans l’espace de Fourier, une échelle est, grosso modo, l’inverse de la fréquence considérée. Dans cet exposé, nous considérons seulement les échelles spatiales, et non les échelles temporelles. Qui plus est, nous nous bornerons au cas d’un fluide périodique en espace.

Dans le cas périodique, pour une fonction  $\mathbf{v}$  les quantités à petite

*échelle* sont des quantités du même type que les coefficients de Fourier  $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{k}$  grand. Dans l'étude de la turbulence, on appelle aussi comme cela des quantités dans l'espace physique du type  $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{r}$  petit.

Le comportement à petite échelle d'un champ de vitesses pour un fluide turbulent est un très vieux problème, étudié à partir des années 1930, notamment par Taylor, Onsager, Heisenberg, von Weizsäcker ou Batchelor (voir [2] et les références qui y sont contenues.) Les travaux qui ont eu le plus d'influence sur la recherche ultérieure sont essentiellement contenus dans trois articles de Kolmogorov publiés en 1941 [16, 17, 18]: on parle de *théorie K41*. Dans ceux-ci, l'auteur énonce des prédictions sous un certain nombre d'hypothèses physiques, dont le fait d'avoir un régime stationnaire en temps (voir [12, 28]).

A partir de maintenant, nous utilisons les notations suivantes:

- $X \stackrel{a}{\sim} Y$  : Il existe  $C > 0$  telle que  $C^{-1}X \leq Y \leq CX$ . La constante  $C$  ne dépend que du paramètre  $a$ , qui n'est jamais la viscosité  $\nu$ . Les notations  $\stackrel{a}{\gtrsim}$  et  $\stackrel{a}{\lesssim}$  sont définies de façon analogue.
- $\langle \dots \rangle$  : Espérance, lorsqu'on considère une force aléatoire.

Pour énoncer les résultats de K41, nous avons besoin de séparer les échelles en trois zones distinctes. L'*échelle dissipative*  $\ell_d$  est l'échelle telle que, pour  $\|\mathbf{k}\| \gtrsim \ell_d^{-1}$ , les coefficients de Fourier d'une fonction  $\mathbf{v}$  décroissent très vite, uniformément en  $\nu$ . On dit que  $\mathbb{I}_{diss} = [0, \ell_d]$  est la *zone dissipative*. Pour K41,  $\ell_d = C\nu^{3/4}$ .

La *zone énergétique*  $\mathbb{I}_{energ} = [\ell_e, 1]$  est l'ensemble d'échelles telles que les modes de Fourier correspondants contiennent la plus grande partie de la norme  $L^2$  de  $\mathbf{v}$ :

$$\sum_{\|\mathbf{k}\| \leq \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \gg \sum_{\|\mathbf{k}\| > \ell_e^{-1}} \langle |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle.$$

Pour K41,  $\ell_e = C$ .

L'intervalle  $\mathbb{I}_{inert} = [\ell_d, \ell_e]$  est appelé *zone inertielle*. Pour K41,  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu^{3/4}, C]$ . Il s'agit de la zone la plus intéressante pour la théorie de la turbulence, où l'on a des asymptotiques non triviales pour les quantités à petite échelle.

Maintenant, regardons le champ de vitesses  $\mathbf{u}$  d'un fluide turbulent.

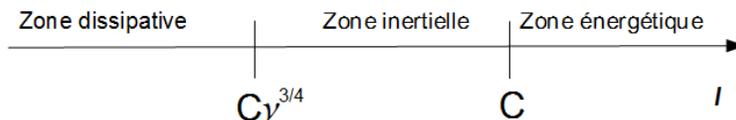


FIGURE 1. Echelles de Kolmogorov

On commence par considérer les moments de l'*incrément longitudinal*:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Le  $p$ -ème moment de  $S(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  est appelé *fonction de structure d'ordre  $p$* :

$$S_p(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \left\langle \left| \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right|^p \right\rangle.$$

Pour  $\mathbf{r}$ ,  $\|\mathbf{r}\| = \ell \in \mathbb{I}_{inert}$ ,  $p \geq 0$ , K41 nous dit que:

$$S_p(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} \ell^{p/3}.$$

Maintenant, énonçons les résultats pour K41 dans l'espace de Fourier. Soit le *spectre d'énergie*  $E(k)$  la moyenne de  $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}|^2 \rangle$  sur l'ensemble des  $\mathbf{n}$  tels que  $\|\mathbf{n}\| \in [C^{-1}k, Ck]$ . Alors, pour  $k$  tel que  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$ ,  $E(k)$  vérifie la relation

$$E(k) \sim k^{-5/3}$$

(voir [24, 25]).

Les prédictions de K41 sont en accord avec les expériences et simulations numériques pour  $S_p$ ,  $p \leq 3$  et pour le spectre d'énergie [12, Chapitre 8]. Cependant, ceci n'est pas le cas pour  $S_p$ ,  $p \geq 4$ . Des théories apportant des corrections à K41 [19, 26] expliquent cela par l'*intermittence spatiale*, qui est observée dans les fluides turbulents.

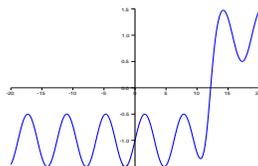


FIGURE 2. Exemple d'une fonction intermittente à petite échelle

Ce type d'intermittence peut être quantifié à l'échelle  $\ell$  par le *facteur*

*d'aplatissement* (flatness)

$$F(\ell) = S_4(\ell)/S_2(\ell)^2.$$

La fonction est d'autant plus intermittente que  $F$  est grand. En particulier, K41 implique que  $F(\ell) \sim 1$  dans la zone inertielle: cette théorie n'y détecte pas d'intermittence.

## 2. "BURGULENCE" 1D: PRÉDICTIONS PHYSIQUES

Maintenant, regardons l'équation de Burgers généralisée périodique stochastique 1D:

$$u_t + f'(u)u_x = \nu u_{xx} + \eta, \quad t \geq 0, \quad x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (1DB)$$

Ici, la fonction  $f$  est supposée lisse, strictement convexe et à croissance modérée. Comme avant, le coefficient de viscosité vérifie  $0 < \nu \ll 1$ . Le terme  $\eta(t, x) = \eta^\omega(t, x)$  désigne une force aléatoire lisse en espace et de type "bruit blanc" en temps. En d'autres mots,  $\eta = w_t$ , où  $w$  est un processus de Wiener lisse en espace [10, Chapitre 4]. De plus, on suppose que la force  $\eta$  est de moyenne nulle sur une période pour tout temps et qu'il en est de même pour la condition initiale  $u(0, \cdot)$ . Cela implique que  $u(t, \cdot)$  est également de moyenne nulle pour tout temps. Encore une fois, nous étudions les solutions  $u(t, x)$  lorsque seule la valeur de  $\nu$  varie: nous fixons  $u_0$  et la distribution de  $\eta$ .

Dans la suite de l'exposé, nous nous limiterons essentiellement au cas  $f(u) = u^2/2$ . On retrouve alors le même type de nonlinéarité et de dissipation que dans (NSE) (mais pas de terme de pression). Il s'agit donc d'un modèle simplifié naturel pour cette équation. Ainsi, il a été étudié par de nombreux physiciens: Burgers, Kida, Kraichnan, Zeldovich, Frisch, Parisi, Gotoh, Polyakov... (voir les articles des synthèses [3, 4]).

Les solutions de (1DB) avec  $\nu = 0$  développent des chocs après un temps fini. Dans le cas que nous étudions, correspondant à  $0 < \nu \ll 1$ , l'équation est parabolique et la solution est lisse pour  $\nu > 0$ . Les zones de choc deviennent donc des "falaises" (cliffs).

Sur le graphique ci-contre, on voit qu'on a les ordres de grandeur suivants pour différentes caractéristiques de la solution:

- Amplitude:  $\sim 1$ .
- Nombre de falaises:  $\sim 1$ .
- Dénivelé au niveau de chaque falaise:  $\sim -1$ .

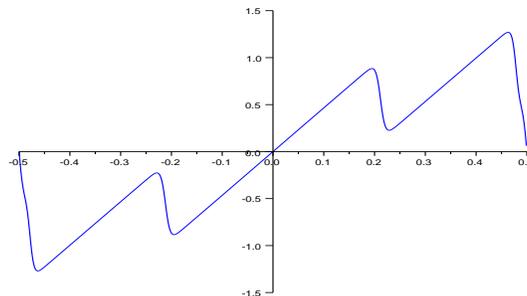


FIGURE 3. Solution “typique” de l’équation de Burgers

- Largeur d’une falaise:  $\sim \nu$ .

On a donc une structure “rampes-falaises” (ramp-cliff) qui correspond à un comportement intermittent.

Il y a eu de nombreuses prédictions physiques pour des quantités à petite échelle analogues à celles de la théorie K41; la liste de publications donnée ci-dessous est loin d’être exhaustive. Le cas sans force, avec données initiales aléatoires a été étudié dans [1, 15, 20]. Le cas avec force de type bruit blanc en temps et lisse en espace a été étudié par E, Khanin, Mazel et Sinai dans [11] pour  $\nu = 0$ . Finalement, notre cas (force de type bruit blanc en temps et lisse en espace,  $\nu > 0$ ) a été étudié par Gotoh et Kraichnan [13].

Dans le cas  $\nu > 0$ , il n’y a pas de résultats quantitatifs précis. Cependant, les arguments utilisés notamment par Aurell, Frisch, Lutsko et Vergassola dans [1] nous aident à comprendre le comportement “typique” des solutions: nous y reviendrons ultérieurement. Présentons d’abord les prédictions physiques pour (1DB) en les juxtaposant avec les conjectures pour les quantités analogues contenues dans K41. Commençons par les résultats pour les échelles spatiales.

- Echelle dissipative:  $C\nu$  pour (1DB),  $C\nu^{3/4}$  pour K41.
- Zone énergétique:  $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$  pour (1DB),  $[C, 1]$  pour K41.
- Zone inertielle:  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$  pour (1DB),  $[C\nu^{3/4}, C]$  pour K41.

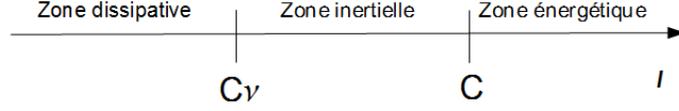


FIGURE 4. Echelles pour (1DB)

Il convient maintenant de redéfinir les *fonctions de structure*, c-à-d les moments des incréments. Soit

$$S_p(\ell) = \left\langle \int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^p dx \right\rangle.$$

la  $p$ -ième fonction de structure. Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , on a alors:

$$S_p(\ell) \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

(K41:  $S_p(\ell) \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} \ell^{p/3}$ ,  $\forall p$ .)

Par conséquent, le coefficient d'aplatissement vérifie:

$$F(\ell) = S_4(\ell)/S_2(\ell)^2 \sim \ell^{-1}. \quad (K41 : S_p(\ell) \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} 1.)$$

Les prédictions physiques “voient” donc ici l’intermittence à petite échelle, contrairement à ce qui se passe pour K41.

Maintenant, présentons les arguments donnés dans [1] pour justifier la relation (1). Tout s’appuie sur le fait que pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ ,  $\ell$  est au moins du même ordre que la largeur typique d’une falaise, et au plus du même ordre que la largeur typique d’une rampe. Il y a donc trois situations possibles:

- $[x, x + \ell]$  coupe une grande partie d’une falaise.  
 Probabilité  $\simeq C\ell$ .  $u(x + \ell) - u(x) = \underbrace{-C}_{\text{falaise}} + \underbrace{C\ell}_{\text{rampes}} = -C$ .  
 $|u(x + \ell) - u(x)|^p \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} 1$ .
- $[x, x + \ell]$  coupe une petite partie d’une falaise.  
 Contribution négligeable.
- $[x, x + \ell]$  ne coupe pas une falaise.  
 Probabilité  $\simeq 1 - C\ell$ .  $u(x + \ell) - u(x) = \underbrace{C\ell}_{\text{rampe}}$ .  
 $|u(x + \ell) - u(x)|^p \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} \ell^p$ .

Ainsi,  $S_p(\ell) = C(p)(\ell + \ell^p)$ . On a bien

$$S_p(\ell) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

Maintenant, considérons le spectre d'énergie. Il s'agit de la moyenne  $E(k)$  de  $\langle \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{u}}_n|^2 \rangle$  sur l'ensemble des  $n$  tels que  $|n| \in [C^{-1}k, Ck]$ . Pour  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$ , on a pour (1DB)

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

Pour K41,  $E(k) \sim k^{-5/3}$ .

### 3. "BURGULENCE" 1D: RÉSULTATS ANALYTIQUES

Dans [7], nous obtenons tout d'abord des bornes supérieures et inférieures qui sont en quelque sorte optimales pour les normes de Sobolev  $W^{m,p}$  de la solution de (1DB). En effet, non seulement ces bornes coïncident à un facteur multiplicatif (indépendant de  $\nu$ ) près, mais en plus elles sont uniformes par rapport à la condition initiale  $u(0, \cdot)$ . De plus, pour toutes les quantités estimées le  $n$ -ième moment se comporte comme la puissance  $n$ -ième du premier moment: cela signifie que nous détectons en quelque sorte le comportement "typique" des solutions.

Nous utilisons les notations suivantes:

- $|\cdot|_p$ : norme de Sobolev dans  $L_p(S^1)$ .
- $|\cdot|_{m,p}$ : semi-norme de Sobolev dans  $W^{m,p}(S^1)$ . Il s'agit de la norme dans  $L_p(S^1)$  de la  $m$ -ième dérivée en espace.
- $\langle \dots \rangle$ : espérance (pour un temps donné).
- $\{ \dots \}$ : moyenne en temps de l'espérance sur  $[t, t+T_0]$ , où  $t \geq T_0$ , et  $T_0$  est une constante.

On montre les 4 résultats suivants. La fonction  $u$  désigne la solution de (1DB).

**Theorème 1.** *Nous avons:*

$$\{ |u|_p^n \} \overset{n}{\sim} 1, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

**Theorème 2.** *Pour les parties positive et négative de  $u_x$ , nous avons respectivement les estimations suivantes:*

$$\{ (\max_{S^1} u_x^+)^n \} \overset{n}{\sim} 1, \quad \{ (\max_{S^1} u_x^-)^n \} \overset{n}{\sim} \nu^{-n}, \quad \forall n \geq 0.$$

**Theorème 3.**  $\{ |u|_{m,2}^n \} \overset{m,n}{\sim} \nu^{-(m-1/2)n}, \quad \forall m \geq 1, \quad \forall n \geq 0.$

**Theorème 4.**  $\{ |u|_{m,\infty}^n \} \overset{m,n}{\sim} \nu^{-mn}, \quad \forall m \geq 1, \quad \forall n \geq 0.$

Remarquons tout d'abord que les Théorèmes 1 et 2 confirment les observations sur le comportement typique des solutions, et notamment le fait que l'amplitude de  $u$  ainsi que le maximum de la partie positive de  $u_x$  sont de l'ordre de 1, alors que le maximum de la partie négative de  $u_x$  est de l'ordre de  $\nu^{-1}$  (la hauteur d'une falaise divisée par sa largeur).

Au premier abord, le Théorème 4 semble nous dire que  $u(x)$  se comporte comme une fonction de type  $g(x\nu^{-1})$ . Cependant, une telle conclusion serait incohérente par rapport au comportement asymétrique de  $u_x$ . Il faut donc travailler davantage pour comprendre réellement la structure des solutions de (1DB) à petite échelle.

Dans les Théorèmes 1-4, les bornes supérieures sont obtenues en utilisant des méthodes stochastiques et le principe du maximum de Kruzhkov. Elles restent vraies lorsqu'on remplace la moyenne en temps par un maximum sur un intervalle de temps. Pour obtenir les bornes inférieures, il faut utiliser des méthodes stochastiques.

Présentons maintenant l'argument que nous appelons le principe du maximum de Kruzhkov. Il se trouve dans l'article [21], pour le cas de l'équation de Burgers multidimensionnelle potentielle non forcée. Pour visualiser le mécanisme dans un cadre simple, considérons (1DB) sans le terme de force  $\eta$  sur le domaine  $S = [T, T + 1] \times S^1$ :

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}.$$

Dérivons cette équation en espace et regardons un point où  $u_x$  atteindrait son maximum sur  $S$  tel que  $t > T$  (on suppose que  $u \not\equiv 0$ , donc ce maximum est strictement positif car  $u(t, \cdot)$  est toujours de moyenne nulle):

$$\underbrace{(u_x)_t}_{\geq 0} + \underbrace{(u_x)^2}_{> 0} + \underbrace{u}_{0} \underbrace{u_{xx}}_{\leq 0} = \nu \underbrace{(u_x)_{xx}}_{\leq 0}.$$

On obtient une contradiction:  $u_x$  vérifie donc le principe du maximum (mais non du minimum) sur  $S$ . Cependant, ce résultat est loin de nous satisfaire, dans la mesure où il n'implique ni amortissement d'une condition initiale de grande amplitude au temps  $T$ , ni estimation uniforme en temps lorsque l'on ajoute un terme de forçage.

Or, la présence du terme  $(u_x)_t + (u_x)^2$  suggère un comportement en  $t^{-1}$  de  $u$ . Ainsi, il est naturel de considérer la fonction  $v = (t - T)u_x$ . Comme précédemment,  $v$  ne peut atteindre un maximum strictement positif que pour  $t > T$ . En un point où ce maximum serait atteint on aurait:

$$\underbrace{v_t}_{\geq 0} + \underbrace{u}_{0} \underbrace{v_x}_{0} + (t - T)^{-1}(-v + v^2) = \nu \underbrace{v_{xx}}_{\leq 0}.$$

Ainsi  $v \leq 1$  sur  $S$ . Donc on a  $u_x \leq (t - T)^{-1}$ . Cette estimation révèle un amortissement uniforme en temps, aussi bien pour une condition de grande amplitude au temps  $T$  que pour un forçage “modéré”. Il s’agit d’une première explication pour l’uniformité de nos estimations par rapport à la condition initiale.

Lorsqu’on adapte cette méthode au cas qui nous intéresse (présence d’un bruit blanc additif), on obtient que pour  $T \geq 1$ :

$$\max_{s \in [T, T+1], x \in S^1} u_x(s, x) \leq C \left( \max_{s \in [T-1, T+1]} |w(s)|_{C^3} + 1 \right), \quad (2)$$

où  $w$  est le processus de Wiener dont  $\eta$  est la dérivée en temps (on fixe  $w(T - 1) = 0$ .) D’après les propriétés du processus de Wiener, on a bien les estimées souhaitées pour  $\max u_x$ .

La méthode marche également pour les nonlinéarités de type  $f'(u)u_x$ , sous la condition:

$$f'(u) \leq C(|u|^{2-\delta} + 1), \quad \delta > 0.$$

Les autres bornes supérieures pour les normes de Sobolev sont obtenues en regardant les relations de dissipation pour les quantités  $\{\|u\|_m^2\}$ . Cette démarche suit dans les grandes lignes celle de Kuksin [22, 23] et surtout celle de Biryuk [5].

Maintenant, regardons comment on obtient les bornes inférieures. Par la formule d’Itô on a:

$$\begin{aligned} \langle |u(t + T_0)|_2^2 \rangle - \langle |u(t)|_2^2 \rangle &= -2\nu \int_t^{t+T_0} \langle |u|_{1,2}^2 \rangle + CT_0 \\ &= -2\nu T_0 \{ |u|_{1,2}^2 \} + CT_0. \end{aligned}$$

Or, on sait que pour  $t \geq 1$ :

$$\langle |u(t + T_0)|_2^2 \rangle \leq \langle (\max_x u_x(t + T_0, x))^2 \rangle \leq C.$$

Donc pour  $T_0$  assez grand on a

$$\{ |u|_{1,2}^2 \} \geq \frac{CT_0 - C}{2T_0} \nu^{-1} \geq C\nu^{-1}.$$

En utilisant la borne supérieure pour la norme  $W^{1,1}$  obtenue ci-dessus et l’inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on obtient les autres bornes inférieures.

Maintenant, passons aux résultats sur les quantités à petite échelle. Notons que toutes les définitions précédentes doivent être changées: l’espérance (crochets  $\langle \cdot \rangle$ ) doit être remplacée par sa moyenne en temps sur  $[t, t + T_0]$  (crochets  $\{ \cdot \}$ ). Les Théorèmes 1-4 impliquent les résultats prédits par des arguments physiques.

**Théorème 5.** *Pour une solution de (1DB), l'échelle dissipative  $\ell_d$  vaut  $C\nu$  et la zone énergétique correspond à  $\mathbb{I}_{energ} = [C, 1]$ . La zone inertielle correspond donc à  $\mathbb{I}_{inert} = [C\nu, C]$ .*

**Théorème 6.** *Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , les fonctions  $S_p(\ell)$  vérifient:*

$$S_p(\ell) \stackrel{p}{\sim} \begin{cases} \ell^p, & 0 \leq p \leq 1. \\ \ell, & p \geq 1. \end{cases}$$

**Corollaire 1.** *Pour  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$ , le coefficient d'aplatissement vérifie:*

$$F(\ell) \sim \ell^{-1}.$$

Le Théorème 5 ainsi que les bornes supérieures dans le Théorème 6 découlent immédiatement des Théorèmes 1-4 en utilisant l'inégalité de Hölder. Pour obtenir les bornes inférieures du Théorème 6, on utilise le fait que, avec une probabilité au moins  $C_1$ , les solutions sont “typiques” pendant un temps au moins  $C_2$  sur  $[t, t+T_0]$ . Les constantes  $C_1, C_2 > 0$  sont indépendantes de  $\nu$ . Ici, le terme “typique” signifie que, pour un temps  $t$  et une valeur de la variable aléatoire  $\omega$  (qui détermine  $\eta^\omega$  et donc  $u$ ) donnés on a:

- $|u(t, \cdot)|_\infty \sim 1$ .
- $\max_{S^1} u_x^+(t, \cdot) \sim 1$ ,  $\max_{S^1} u_x^-(t, \cdot) \sim \nu^{-1}$ .
- $|u(t, \cdot)|_{2,\infty} \lesssim \nu^{-2}$ .

En d'autres mots, ces quantités se comportent à peu près comme leurs espérances moyennées en temps. Cette propriété de “typicité probable” découle des Théorèmes 1-4.

Soit donc une solution “typique” considérée en un temps “typique”. Comme précédemment,  $\ell \in \mathbb{I}_{inert}$  est au moins du même ordre que la largeur d'une région où  $-u_x$  est grand (falaise). Plus concrètement, on peut montrer rigoureusement l'existence d'au moins une région de ce type de largeur au moins  $C\nu^{-1}$ . Pour cela, il suffit de prendre un point où  $u_x$  atteint son minimum  $-C\nu^{-1}$  et d'observer que la dérivée de  $u_x$  vaut au plus  $C\nu^{-2}$  en valeur absolue: cela nous assure de l'existence d'une falaise de largeur au moins  $C\nu$ , correspondant à un dénivelé d'au moins  $C$ .

Comme précédemment, la probabilité que  $[x, x+\ell]$  coupe une grande partie d'une falaise vaut au moins  $C\ell$ . On a alors  $|u(x+\ell) - u(x)|^p \stackrel{p}{\gtrsim} 1$ .

Ainsi, pour  $p \geq 1$ , on a la borne inférieure souhaitée:  $S_p(\ell) \stackrel{p}{\gtrsim} \ell$ .

Pour  $p < 1$ , il faut travailler davantage, en utilisant l'inégalité de Hölder. On ne peut plus s'appuyer sur l'intuition géométrique. En

effet, la contribution dominante semble venir des rampes, et on n'a pas assez d'information sur ces structures.

Finalement, énonçons le théorème principal dans l'espace de Fourier:

**Théorème 7.** *Pour  $k^{-1} \in \mathbb{I}_{inert}$ , le spectre d'énergie vérifie la loi d'échelle de type K41:*

$$E(k) \sim k^{-2}.$$

L'idée de la preuve consiste à combiner le Théorème 6 et la formule de Wiener-Khinchin:

$$\int_{S^1} |u(x + \ell) - u(x)|^2 dx = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2(\pi n \ell) |\hat{u}_n|^2.$$

Remarquons qu'on a les mêmes résultats que ci-dessus dans le cas où  $\eta$  est une force de type "kick" (correspondant à des impulsions indépendantes identiquement distribuées  $\eta_k$  à  $t = k$ ). En effet, nous avons prouvé que dans ce cas les Théorèmes 1-4 sont toujours valables [6]. On a aussi des résultats très similaires, sous certaines conditions sur  $u_0$ , pour le cas de l'équation (1DB) sans force [5, 8].

#### 4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons obtenu des résultats exacts et rigoureux pour la turbulence de Burgers à petite échelle. Ces résultats confirment les prédictions physiques sous des hypothèses très générales pour la donnée initiale et raisonnables pour la force. On utilise des méthodes d'EDP et d'EDP stochastiques qui nous permettent de confirmer l'intuition géométrique et de quantifier l'échelle dissipative et l'intermittence pour (1DB). Notons que ni la théorie de Hopf-Lax-Oleinik pour les solutions faibles correspondant à la limite  $\nu \rightarrow 0$ , ni la transformation de Cole-Hopf [9, 14] ne sont utilisées.

On espère que des résultats très similaires peuvent être prouvés dans le cas multidimensionnel lorsque  $u$  est un potentiel. Ce serait en tout cas en accord avec les simulations numériques dans la limite  $\nu \rightarrow 0$  qui correspond à des modèles très importants en cosmologie, étudiés entre autres par Shandarin et Zeldovich [27].

Il y a eu d'autres prédictions sur les quantités à petite échelle, notamment sur les fonctions de distribution pour les valeurs de  $u_x$  (voir notamment [13]). Nous n'avons pas assez d'information sur la structure "ramp-cliff" et ne pouvons donc ni confirmer ni infirmer ces prédictions.

## REFERENCES

- [1] E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, M. Vergassola, *On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data*, Journal of Fluid Mechanics 238, 1992, 467-486.
- [2] G. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, 1953.
- [3] J. Bec, U. Frisch, “*Burgulence*”, Les Houches 2000: New Trends in Turbulence; M. Lesieur, A. Yaglom and F. David, eds., 341-383, Springer EDP-Sciences, 2001.
- [4] J. Bec, K. Khanin, *Burgers turbulence*, Physics Reports 447 (2007), 1-66.
- [5] A. Biryuk, *Spectral properties of solutions of the Burgers equation with small dissipation*, Functional Analysis and its Applications, 35:1 (2001), 1-12.
- [6] A. Boritchev, *Estimates for solutions of a low-viscosity kick-forced generalised Burgers equation*, Prépublication (à paraître dans Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A), arXiv:1107.4866v1.
- [7] A. Boritchev, *Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation*, Prépublication, arXiv:1201.5567.
- [8] A. Boritchev, *Note on Turbulence in a Generalised Burgers Equation*, Prépublication disponible sur [www.math.polytechnique.fr/~boritchev/DeterministicBurgers.pdf](http://www.math.polytechnique.fr/~boritchev/DeterministicBurgers.pdf).
- [9] J. D. Cole, *On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quarterly of Applied Mathematics, 1951 (9), 225-236.
- [10] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications vol. 45, Cambridge University Press, 1992.
- [11] Weinan E, K. Khanin, A. Mazel, Ya. Sinai, *Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing*, Annals of Mathematics 151 (2000), 877-960.
- [12] U. Frisch, *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.
- [13] T. Gotoh, R. Kraichnan, *Steady-state Burgers turbulence with large-scale forcing*, Physics of Fluids 10 (1998), 2859-2866.
- [14] E. Hopf, *The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Communications in Pure and Applied Mathematics, 1950, 3:3, 201-230.
- [15] S. Kida, *Asymptotic properties of Burgers turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, 93 (1979), no.2, 337-377.
- [16] A. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*, Doklady Akademii Nauk SSSR 30 (1941), 9-13 (reprinted in Proceedings of the Royal Society of London A 434 (1991), 9-13).
- [17] A. Kolmogorov, *On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*, Doklady Akademii Nauk SSSR 31 (1941), 538-540.
- [18] A. Kolmogorov, *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, Doklady Akademii Nauk SSSR 32 (1941), 16-18 (reprinted in Proceedings of the Royal Society of London A 434 (1991), 15-17).
- [19] A. Kolmogorov, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, Journal of Fluid Mechanics, 13 (1962), 82-85.

- [20] R. H. Kraichnan, *Lagrangian-history statistical theory for Burgers' equation*, Physics of Fluids 11(2), 1968, 265-277.
- [21] S. N. Kruzhkov, *The Cauchy Problem in the large for nonlinear equations and for certain quasilinear systems of the first-order with several variables*, Soviet Math. Doklady, 5 (1964), 493-496.
- [22] S. Kuksin, *On turbulence in nonlinear Schrödinger equations*, Geometric and Functional Analysis, 1997, vol. 7, 783-822.
- [23] S. Kuksin, *Spectral properties of solutions for nonlinear PDEs in the turbulent regime*, Geometric and Functional Analysis, 1999, vol. 9, 141-184.
- [24] A. Obukhov, *On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 32 (1), 22-24, 1941.
- [25] A. Obukhov, *Spectral energy distribution in a turbulent flow*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Geografii i Geofiziki, 5 (4-5), 453-466, 1941.
- [26] G. Parisi, U. Frisch, *Fully developed turbulence and intermittency*, Proceedings of the International School on Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, ed. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi, 1985, 71-88, Amsterdam: North-Holland.
- [27] S. Shandarin, Ya. Zeldovich, *The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*, Reviews of Modern Physics, 61, no. 2, 1989, 185-220.
- [28] A. Tsinober, *An informal conceptual introduction to turbulence*, Fluid Mechanics and its Applications, Springer, 2009.