Éléments de correction
Olympiades Académiques

Académie de Lyon

2008

Les bons nombres

1. Dans la décomposition en somme d'entiers naturels d'un « bon » nombre, il ne peut pas y avoir le nombre 1 et un autre entier, ni deux nombres 2 et un autre entier. Cette remarque permet de limiter le nombre de décompositions à étudier étant entendu qu'on range les nombres par ordre croissant. Ainsi pour 5, 6, 7 et 8 il reste à étudier les décompositions suivantes :
   * 5 = 2+3
   * 6=2+4=3+3
   * 7=2+5=3+4
   * 8=2+3+3=2+6=3+5=4+4

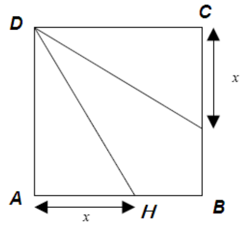
   dont aucune ne convient : 5, 6, 7 et 8 sont donc « mauvais ».

   Les décompositions 4=2+2, 9=3+3+3 et 10= 2+4+4 permettent de prouver que 4, 9 et 10 sont « bons ».
2. $n^2 = n + n + \cdots + n$ somme de n termes égaux à n et comme

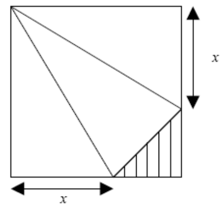
   $$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}} = 1$$

   On en déduit que n^2 est « bon » pour tout $n \geq 2$
3. Si n est « bon » il est la somme d'entiers dont la somme des inverses vaut 1 ; $2n$ est alors la somme d'entiers dont la somme des inverses est égale à $\frac{1}{2}$; or, d'une part $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $2n + 2$ est « bon » lorsque n est « bon » , et d'autre part $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et donc $2n + 9 = 2n + 3 + 6$ est lui-aussi « bon » lorsque n est « bon » .
4. Tous les nombres pairs compris entre $2 \times 24 + 2 = 50$ et $2 \times 48 + 2 = 100$ sont « bon » , et tous les nombres impairs compris entre $2 \times 24 + 9 = 57$ et $2 \times 45 + 9 = 99$ sont « bon » . Donc tous les entiers compris entre 24 et 100 sont « bon » , puis en réitérant le procédé, tous les nombres entiers compris entre 24 et 2×100, 24 et 4×100, $\cdots$ 24 et $2^n \times 100$ quelque soit l'entier naturel n, sont « bon » , et donc, tous les entiers supérieurs à 24 sont « bon » .

Un partage équitable



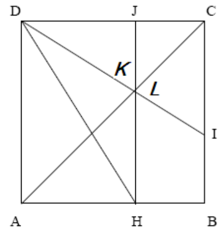
1. L'aire du triangle AHD vaut $\frac{x}{2}$; elle vaut d'autre part $\frac{1}{3}$ de l'aire du carré de côté 1.
   De $\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ on tire : $x = \frac{2}{3}$.



2. Les aires des trois domaines valent respectivement

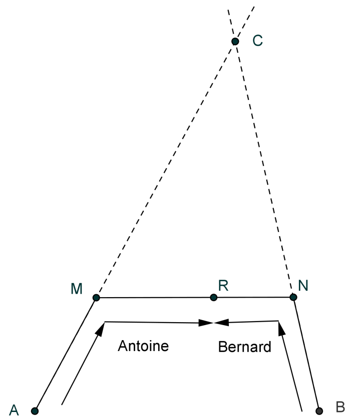
$$\frac{x}{2} \quad , \quad \frac{x}{2} \quad , \quad 1 - 2\times\frac{x}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}$$

   donc $x^2 + x - 1 = 0$ et comme $0 < x < 1$,on a $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



3. (JH) coupe (AC) en K et (DI) en L. $[AC]$ étant une diagonale du carré, le triangle JKC est rectangle et isocèle donc $JK = JC = HB = 1 - x$.
   Le théorème de Thalès donne de plus : $\frac{JL}{CI} = \frac{DJ}{DC}$ et donc : $JL = x^2$.
   Or $x^2 = 1 - x$ donc $JK = JL$ et $K = L$, les trois droites concourent.

1 Les promeneurs



1. v_A et v_B sont les vitesses respectives d'Antoine et Bernard. T est le temps nécessaire pour arriver en C, t le temps nécessaire pour arriver en M ou N.

$$AC = v_AT \text{ et } BC = v_BT$$

$$AM = v_At \text{ et } BN = v_BT$$

   d'où $MC = v_A(T-t)$ et $NC = v_B(T-t)$ et par conséquent

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}$$

   La réciproque du théorème de Thalès donne alors (MN) parallèle à (AB) et le quadrilatère $AMNB$ est un trapèze.

2. Les promeneurs conservant toujours le même allure, de leurs affirmations il résulte :
   $AM = MR$ et $BN = NR$ donc $\widehat{MAR} = \widehat{MRA}$ et $\widehat{NBR} = \widehat{NRB}$.
   Comme d'autre part : $\widehat{RAB} = \widehat{MRA}$ et $\widehat{NRB} = \widehat{RBA}$ (angles alternes internes), dans le triangle ABC (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et (BR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$.
   R est donc le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

3. Après avoir construit le triangle ABC, R s'obtient comme intersection des bissectices et M et N en construisant la parallèle à (BC) passant par R.

2 Nombres et tableaux

◇	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	6	10	15	21	28
2	2	5	9	14	20	27	35
3	4	8	13	19	26	34	43
4	7	12	18	25	33	42	52
5	11	17	24	32	41	51	62
6	16	23	31	40	50	61	73
7	22	30	39	49	60	72	85
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1. $C(1,9) = 37$, $C(1,10) = 46$ et $C(1,13) = 79$
   $C(9,1) = 45$, $C(10,1) = 55$ et $C(13,1) = 91$
   On peut conjecturer que : $C(1,j+1) = C(1,j) + j$ et $C(i+1,1) = C(i,1) + (i+1)$
2. En s'appuyant sur les conjectures, en remarquant que $j = C(1,j+1) - C(1,j)$, on remplit les 4 premières cellules $C(1,1) = 1$, $C(1,2) = 2$, $C(2,2) = 5$ et $C(2,1) = 3$ ce qui, sur un tableur donnerait :
   Cellule A1 : 1   Cellule A2 : 2   Cellule B2 : 5   Cellule B1 : 3
   Dans la cellule A3, on peut rentrer la formule : =A2+A2-A1+1 et on recopie cette formule vers le bas dans la colonne A, on recopie alors cette colonne vers la droite.
   Il reste les deux premières lignes à compléter ; dans la cellule C1, il suffit alors de rentrer la formule =B1+B1-A1+1 et de recopier cette formule vers la droite, puis de recopier la ligne d'une ligne vers le bas.
   (En utilisant la fonction "ligne()" , on pouvait créer d'autres formules)
3. (a) $C(1,j+1)$ est égal à $C(1,j)$ auquel on ajoute le nombre j d'éléments de la $(j)^{\text{ième}}$ diagonale.
   $C(i+1,1)$ est égal à $C(i,1)$ auquel on ajoute le nombre $i+1$ d'éléments de la $(i+1)^{\text{ième}}$ diagonale.
   (b) $C(1,j) = C(1,1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (j-1) = 1 + \frac{(j-1)j}{2} = \frac{j^2-j+2}{2}$
   $C(i,j)$, $C(i-1,j+1)$, $C(i-2,j+2)$, $\cdots$ et $C(1,j+i-1)$ sont sur la même diagonale et
   $$C(i,j) = C(1,j+i-1) + (i-1)$$
   On en déduit que :
   $$C(i,j) = \frac{i^2 + 2ij + j^2 - i - 3j + 2}{2}$$
4. $C(i,j)$ est compris entre $C(1,j+i-1)$ et $C(1,j+i)$ or $C(1,63) = 1954$ et $C(1,64) = 2017$ donc $j+i-1 = 63$ et $i-1 = 2008-1954 = 54$ et donc $C(55,9) = 2008$