Quelques éléments de correction

Académie de Lyon

4 juin 2009

1 Exercice 1

Partie A

1. Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2. Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B

1. Triangle 20-magique :

			2			
		7		1		
	6				9	
5		3		4		8

2. (a)

$$3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + T = 45 + T$$

(b) D'après la partie A :

$$\frac{6 + 45}{3} \leq S \leq \frac{24 + 45}{3}$$

soit : $17 \leq S \leq 23$

(c) (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3. Triangle 17-magique

			1			
		8		4		
	6				9	
2		5		7		3

4. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

   Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

   Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$.

   On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 9$.

   Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

   Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu. Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

   (Une autre solution consite aussi à envisager toutes les possibilités.)

5. (a) Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1+n_2+n_3+n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

   7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

   (b) Un triangle 19-magique :

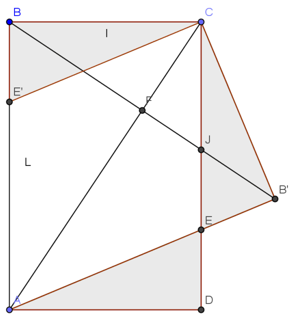
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 7 & & & \\ & & 4 & & 1 & & \\ & 5 & & & & 9 & \\ 3 & & 8 & & 6 & & 2 \end{array}$$

6. Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7. Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle S-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

   Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

2 Exercice 2



2. Sachant que $AE'CE$ est un losange on a : $(16-c)^2 + 8^2 = c^2$ soit $c = 10$.
3. On a nécessairement $(L-7,5)^2+l^2 = 7,5^2$: avec $L \geq 8$ soit : $l^2 = L(15-L)$
   d'où les seules réponses entières : $L = 12$ et $l = 6$.
   Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.
4. Sachant que $AE'CE$ est un losange, on a $ED = E'B$ donc les triangles rectangles $CE'B$ et AED sont isométriques. Avec les notations de l'énoncé, on a :

   $$(L-c)^2 + l^2 = c^2 \Leftrightarrow L^2 + l^2 = 2Lc \Leftrightarrow l^2 = L(2c-L)$$

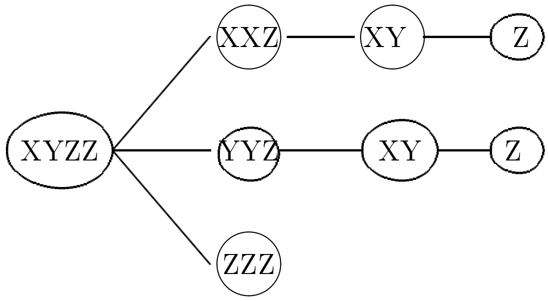
   La somme des aires des deux triangles est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l = 0,25Ll$ d'où $c = 0,75L$ d'où $l^2 = \frac{1}{2}L^2$ d'où $l = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

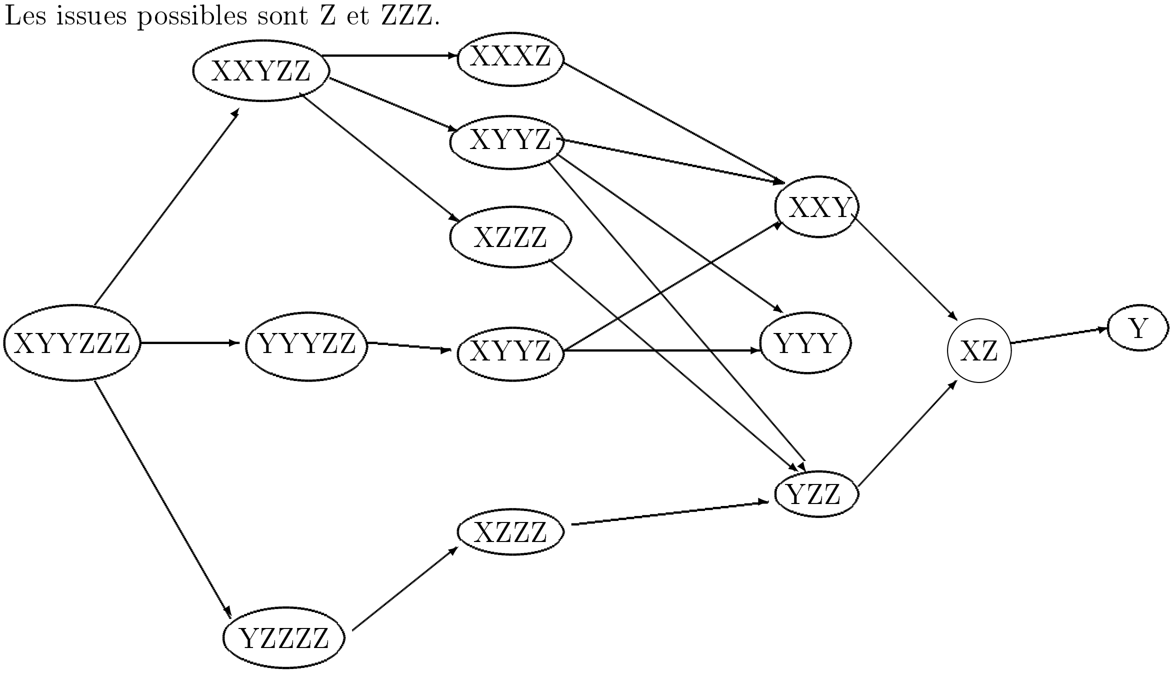
5. Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC). Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de $CB'E$).
   La symétrie assure les égalités des angles : $\widehat{E'CA} = \widehat{ACE}$ et $\widehat{E'AC} = \widehat{CAE}$.
   Le parallélisme de (CE) et (AE') implique que : $\widehat{E'AC} = \widehat{ACE}$ (angles alternes-internes). Par conséquent, les triangles ACE et ACE' sont isocèles et symétriques par rapport à (AC), ce qui permet de conclure.

3 Itération

1. 2. En ce qui concerne les deux premières questions, on peut représenter par des arbres l'évolution de la séquence :



Les issues possibles sont Z et ZZZ.



Les issues possibles sont Y ou YYY

3. A chaque étape, le nombre de lettres diminue d'une unité ; il y a donc 5 étapes pour arriver à une séquence d'une lettre lorsqu'on part d'une séquence de six lettres.
4. Puisqu'il y a 33 lettres dans la séquence, il faut 32 étapes pour arriver à une séquence d'une lettre. A chaque étape le nombre de lettres X(ou

Y ou Z)augmente ou diminue d'une unité, donc change de parité. Au départ il y a 10 lettres X, 11 lettres Y et 12 lettres Z, donc 32 étapes donnent un nombre pair de lettres X et de lettres Z et un nombre impair de lettres Y. Quelle que soit la succession d'opérations, lorsqu'il reste une lettre, c'est la lettre Y.

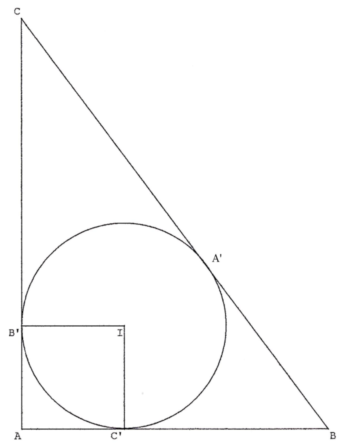
5. En utilisant le raisonnement précédent (avec 9 étapes), on peut choisir n'importe quelle séquence initiale comportant un nombre pair de lettres X (même 0) et un nombre impair de lettres Y et Z (avec un total de 10 lettres).
   On peut choisir : XXYYYYYZZZ qui donne, par exemple :
   XXYYYYYZZZ $\longrightarrow$ XXXYYYYZZ $\longrightarrow$ XXXXYYYZ $\longrightarrow$ XXXXXYY $\longrightarrow$ XXXXYZ $\longrightarrow$ XXXYY $\longrightarrow$ XXYZ $\longrightarrow$ XYY $\longrightarrow$ YZ $\longrightarrow$ X

Cercles inscrits

1. Le quadrilatère $AC'IB'$ a trois angles droits et deux côtés successifs IB' et IC' égaux, c'est donc un carré.

$$2r = AB' + AC'$$
$$2r = (AC - CB') + (AB - BC')$$
$$2r = b + c - (CB' + BC')$$

or $CB' = CA'$ $BC' = BA'$ et $BA' + CA' = a$ d'où $2r = b + c - a$.



2. On applique la formule précédente aux trois triangles PQH, PQR et PRH

$$2r_1 = PH + QH - PQ$$
$$2r_2 = PR + PQ - QR$$
$$2r_3 = RH + PH - PR$$

d'où $2(r_1 + r_2 + r_3) = 2PH + QH + RH - QR$
or $QH + RH = QR$
donc $r_1 + r_2 + r_3 = PH$.

3. (a) En notant : $x = E'D$, $y = E'F$ et $z = KE'$.
   Les rayons des cercles inscrits dans les triangles $DE'K$ et KFE' sont $\frac{z+x-\sqrt{x^2+z^2}}{2}$ et $\frac{z+y-\sqrt{y^2+z^2}}{2}$.

L'égalité des deux rayons implique que :
(1) $x - \sqrt{x^2+z^2} = y - \sqrt{y^2+z^2}$
donc $x - y = \sqrt{x^2+z^2} - \sqrt{y^2+z^2}$
donc $(x-y)\left(\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2}\right) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
et comme $\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2} > x + y$ car $z \neq 0$, il vient $x = y$
E' est à la fois le milieu de $[DF]$ et le pied de la hauteur issue de E. Le triangle est donc isocèle en E.

(b) On peut aussi conclure de cette manière :

L'existence des triangles $DE'K$ et $FE'K$ impose au triangle DEF de n'être rectangle ni en D ni en F.

Les deux centres des cercles sont du même côté de la droite (DF), à même distance de (DF) et à même distance de (EE') : ils sont donc soit confondus soit symétriques par rapport à la droite (EE').

Le cas où les centres sont confondus correspond au cas où E' est en dehors du segment $[DF]$. On n'aurait qu'un cercle avec trois tangentes issues de K, les droites(KE'), (KF) et (KD), ce qui est impossible

Finalement, E' est dans $]DF[$ et les centres des cercles sont symétriques par rapport à (EE'). Les deux cercles de même rayon sont donc symétriques par rapport à (EE') et les tangentes (KD) et (KF) à ces cercles sont aussi symétriques par rapport à (EE') puisque K est sur cette droite. (KE') est à la fois hauteur et bissectrice du triangle KDF qui est isocèle en K. E' est donc le milieu de $[DF]$ et le triangle DEF est isocèle en E.

Tablettes de chocolat

Partie A

1. $8 - 1 = 7$ cassures sont nécessaires pour obtenir les 8 barres. Pour chaque barre il faut $4 - 1 = 3$ cassures pour obtenir les 3 carreaux. Le nombre total de cassures est donc $7 + 8 \times 3 = 31$.
2. $4 - 1 = 3$ cassures sont nécessaires pour obtenir les 4 rangées. Pour chaque rangée il faut $8 - 1 = 7$ cassures pour obtenir les 8 carreaux. Le nombre total de cassures est donc $3 + 4 \times 7 = 31$.
3. La généralisation de la question 1 s'obtient en remplaçant 8 par a et 4 par b : Le nombre de cassures est donc

$$a - 1 + a(b-1) = ab - 1$$

.

4. Comme ci-dessus la généralisation de la question 2 se fait en remplaçant 8 par a et 4 par b : on obtient alors donc $b-1+b(a-1)$ soit encore $ab-1$ cassures.
5. Une cassure est nécessaire pour obtenir les deux tablettes T_1 et T_2.
   Nombre de cassure à partir de T_1 : $bc-1$
   Nombre de cassures à partir de T_2 : $(a-c)b-1$
   Nombre total de cassures : $1+bc-1+(a-c)b-1=ab-1$

Partie B

1. il y a $(a-2)(b-2)$ carreaux intérieurs qui n'ont donc aucun bord lisse et ab carreaux en tout donc une relation est $3(a-2)(b-2)=ab$.
2. $a=\frac{3b-6}{b-3}$
   $a-4=\frac{6-b}{b-3}$ donc $a-4$ est positif ou nul quand b est inférieur ou égal à 6
3. $a-3=\frac{3}{b-3}$ donc a n'est pas égal à 3, il est donc supérieur ou égal à 4 et , d'après ce qui précède, b est inférieur ou égal à 6
   $b=5$ donne $a=4{,}5$ ce qui n'est pas possible donc $b=6$ et $a=4$.

Remarque : on peut aussi, pour la partie A, raisonner de la manière suivante (pour les enseignants et les élèves de terminale)

Soit une tablette de a barres et b rangées. On désigne par $n=ab$ le nombre de carreaux de la tablette.

Soit un naturel non nul N. Supposons la proposition (P) "il faut $n-1$ cassures pour sectionner complètement une tablette de n carreaux " vraie pour tous les n strictement inférieurs à N.

Sectionner une tablette de N carreaux consiste à la couper d'abord en deux sous tablettes T_1 et T_2 de n_1 et n_2 carreaux respectivement ($n_1<N$, $n_2<N$, $n_1+n_2=N$) ce qui conduit à 1 cassure initiale puis n_1-1 pour T_1 et n_2-1 pour T_2. Le nombre total de cassures est donc :

$$1+(n_1-1)+(n_2-1)=n_1+n_2-1=N-1$$

.

(P) se vérifiant facilement pour 1, 2, 3 carreaux , le raisonnement ci-dessus montre que (P) est vraie pour 4 carreaux, donc pour 5 carreaux et ainsi de suite ...

Le nombre de cassures nécessaires pour parvenir à sectionner une tablette de a barres et b rangées, et cela de façon quelconque, est $ab-1$.