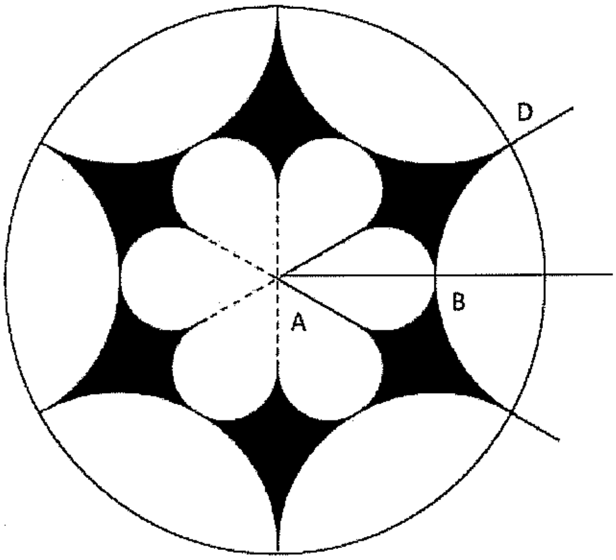
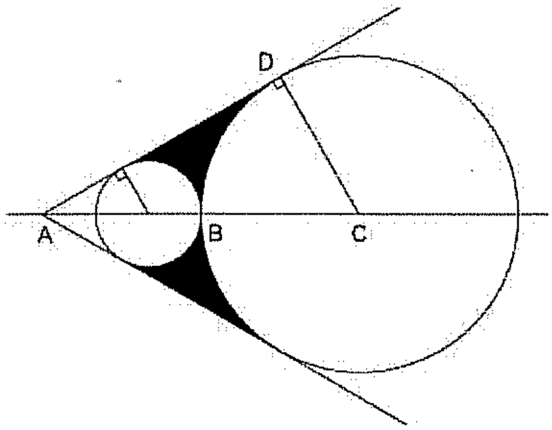
Exercice National 1 : ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a.* Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Correction (proposée par l'académie d'Amiens):

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2. *a.* Première méthode :
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{\mathrm{CAD}} = 30°$. Donc $\widehat{\mathrm{BCD}} = 60°$.
   Et puisque $\mathrm{BC} = \mathrm{DC}$, le triangle BCD est donc équilatéral.
   Ensuite, $\widehat{\mathrm{BDA}} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $\mathrm{BD} = \mathrm{BA}$.
   Finalement, on trouve bien $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.
   Deuxième méthode :
   On note R le rayon du grand cercle.
   On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{\mathrm{DAC}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$, d'où $\sin 30° = \dfrac{R}{\mathrm{AC}}$.
   Puisque $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\mathrm{AC} = 2R$.
   Or $\mathrm{BC} = R$, d'où $\mathrm{AB} = R$. Finalement $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
   En appliquant le résultat précédent, il vient que $\mathrm{AE} = 2r$. De plus, $\mathrm{EB} = r$.
   On obtient donc $\mathrm{AB} = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.
3. On doit avoir $\mathrm{AD} = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

   La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{\mathrm{BEF}}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{\mathrm{BCD}}$.

   Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$.

   Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

Correction (proposée par Nancy-Metz)

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^e terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
   Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3+x-2=0$ et $3+x-2=11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
   a. Si $b=a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».
   b. Si $b=a-1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11-(a-b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b<a-1$, on a le chaînonze « $a\ b\ (11-a+b)$ » avec $(11-a+b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b<a-1$, on a $-10 < b-a < -1$ d'où $1 < 11-a+b < 10$.
   d. Si $a<b$, « $a\ b\ (b-a)$ » avec $b-a$ est bien un chiffre car $0 < b-a < 10$.
   Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a = b$**
   Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
   Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
   Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « $a\ a\ 0\ (11-a)\ (11-a)\ 0\ a\ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.
   2^e cas : $a = b + 1$
   la chaîne se bloque et est de longueur 2.
   3^e cas : $a = 0$ et $b = 1$
   « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.
   4^e cas : $0 < a < b$,
   « $a\ b\ (b-a)\ (11-a)\ (11-b)\ (11+a-b)\ a\ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si
   - $b-a = b-1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
   - $11-b = 11-a-1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^e cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^e cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

2 Commentaires et éléments de correction pour Algorithme et fractions égyptiennes

Ce problème essaye de faire démontrer l'algorithme glouton permettant de décomposer une fraction en somme de fractions égyptiennes. Les quatre premières questions sont placées là pour faire s'exercer les élèves sur les notations, manipuler des fractions égyptiennes et découvrir le principe de l'algorithme glouton.

Dans la question 5) on démontre la formule permettant de faire tourner l'algorithme (récursif, en l'occurrence).

Enfin dans la question 6) on fait fonctionner l'algorithme en une étape (pour $\frac{2}{3}$) et en deux étapes (pour $\frac{5}{7}$) et on demande la démonstration dans le cas général.

1.
2.
3.
4.
5.

$$\frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right)+1} + \frac{x - mod(y,x)}{y \times \left(E\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)} = \frac{y + x - mod(y,x)}{y\left(E\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)}$$

$$= \frac{E\left(\frac{y}{x}\right) \times x + mod(y,x) + x - mod(y,x)}{y \times \left(E\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)} = \frac{x}{y}$$

6. (a)

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

(b)

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$$

(c) Ou bien le numérateur de la fraction simplifiée

$$\frac{x - mod(y,x)}{y\left(E\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)}$$

est égal à 1 et la décomposition est faite ou bien on recommence avec cette fraction simplifiée, son numérateur étant soit $x - mod(x,y)$ soit un diviseur de ce nombre. Comme, de plus, y n'est pas un multiple de x (par hypothèse), on a donc $0 < mod(y,x) < x$ de sorte que $0 < x - mod(y,x) < x$. Les fractions successives ont donc des numérateurs de plus en plus petits et supérieurs ou égaux à 1 ce qui permet d'assurer que l'algorithme se termine.

(d) $\frac{1}{E(\frac{y}{x})+1}$ est la plus grande fraction égyptienne plus petite que $\frac{x}{y}$. La différence $\frac{x}{y} - \frac{1}{E(\frac{y}{x})+1}$ est donc strictement inférieure à $\frac{1}{E(\frac{y}{x})+1}$ (sinon, $\frac{1}{E(\frac{y}{x})}$ serait une fraction égyptienne plus grande que $\frac{1}{E(\frac{y}{x})+1}$ et qui serait plus petite que $\frac{x}{y}$, ce qui est absurde) ; par conséquent, en décomposant cette différence, on trouvera une fraction égyptienne strictement inférieure que celle déjà exhibée.

2 Eléments de correction pour la montre

1. A 1h30, l'aiguille des heures a parcouru la moitié du chemin entre midi et 3h soit 45 ° . L'aiguille des minutes est « verticale »(dans la direction 6-12). Les angles mesurent donc 135 ° et 225 ° .
2. A 1h40, l'aiguille des heures a parcouru les deux tiers d'une heure après treize heure, soit 50 ° . L'aiguille des minutes fait elle avec la « verticale » un angle de 60 ° ; les angles valent donc 190 ° et 170 ° .
3. L'aiguille des minutes tourne 12 fois plus vite que l'aiguille des heures. Quand l'aiguille des heures aura tourné de 1 ° , celle des minutes aura tourné de 12 ° .
4. A 2h0min0s, l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes mesure 60 ° . 1 ° pour l'aiguille des heures correspond à $\frac{1}{30}$ d'heure soit 2 minutes. Si α est la mesure de l'angle balayé par l'aiguille des heures, on a :

$$12\alpha - (60 + \alpha) = 60$$

Soit donc $\alpha = \frac{120}{11}$; il sera alors 2h21min49s. L'aiguille des secondes aurait dû indiquer 49s.