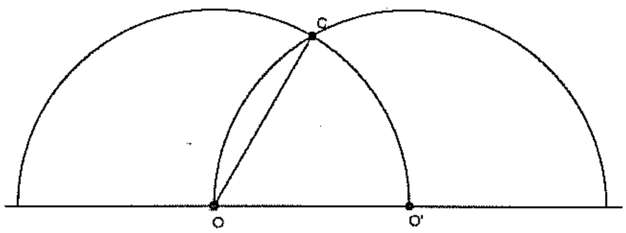
Eléments de correction (proposés par l'Académie de Corse)

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left(\pi.60^2-\pi.15^2\right)=\frac{\pi}{2}15^2\left(4^2-1\right)=\frac{\pi}{2}.15^3=3375.\frac{\pi}{2}$ soit en valeur approchée 5301 cm^2.

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:



$A_1=\frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2=\frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera : A_2-A_1.

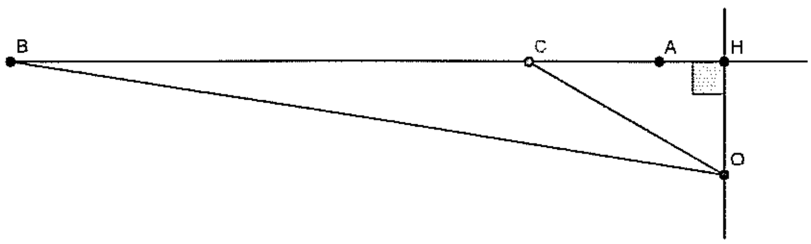
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A=A_2+A_2-A_1=2A_2-A_1$

Donc $A_3=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$\mathcal{A}=\pi R^2-\left(\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ et donc $\boxed{\mathcal{A}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3)



a) $\sin\widehat{OCH}=\sin 30°=\frac{1}{2}$ donc

$\frac{OH}{OC}=\frac{1}{2}$ soit $OH=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H on a

$$OA^2=HA^2+HO^2=\left(HC-CA\right)^2+HO^2=\left(\frac{3}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2.$$

Ainsi $OA=OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180-\widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX}=2\times 30=60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

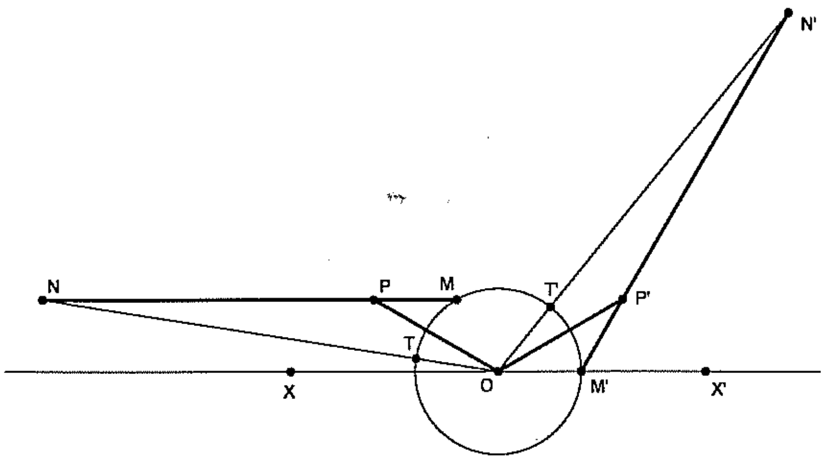
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arc de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A}=\frac{1}{3}\left(\pi.ON^2-\pi.OT^2\right)=\frac{\pi}{3}\left(OB^2-OA^2\right)$

Or, $OA^2=a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2=OH^2+HB^2=OH^2+\left(HC+CB\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}+4a\right)^2=\left(\frac{3}{4}+\frac{121}{4}\right)a^2=31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A}=\frac{\pi}{3}\left(31a^2-a^2\right)=\frac{\pi}{3}\times30a^2=10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A}=10\pi a^2}$



.Eléments de correction (proposés par l'académie de Montpellier)

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+..................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.

Donc n est de la forme $4k$ ou $4k$+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

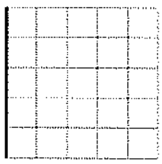
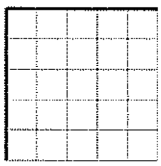
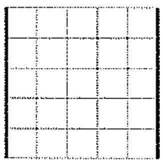
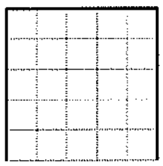
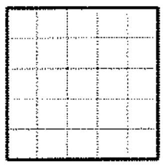
A propos de carrés, de cubes, de peinture et de café

Equipe des Olympiades Académiques de l'Académie de Lyon

24 mars 2011

1 Carrés et cubes : éléments de correction

1. Pour $n = 5$

1 côté rouge	2 côtés rouges	3 côtés rouges	4 côtés rouges
5	9 ou 10	13	16
	 		

2. Pour n

1 côté rouge	2 côtés rouges	3 côtés rouges	4 côtés rouges
n	$2n-1$ ou $2n$	$3n-2$	$4n-4$

Julie peut donc avoir peint un côté d'un carré de côté 28, ou deux côtés opposés d'un carré de côté 14, ou trois côtés d'un carré de côté 10, ou enfin les quatre côtés d'un carré de côté 8.

3.
4.

	1 face rouge	2 faces rouges	3 faces rouges	4 faces rouges	5 faces rouges	6 faces rouges
$n = 5$	25	50 ou 45	65 ou 61	80 ou 77	89	98
n	n^2	$2n^2$ ou $2n^2 - n$	$3n^2 - 2n$ ou $3n^2-3n+1$	$4n^2 - 4n$ ou $4n^2-5n+2$	$5n^2-8n+4$	$6n^2-12n+8$

5. $4n^2 - 4n = 728$ est la seule équation donnant une solution entière positive : $n = 14$

2 Le café de Julie : éléments de correction

1.

Etape	Disponible	Bu	Restant
1	1	$\frac{1}{100} \times 1 = \frac{1}{100}$	$\frac{99}{100}$
2	$\frac{99}{100}$	$\frac{1}{99} \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$	$\frac{98}{100}$
3	$\frac{98}{100}$	$\frac{1}{98} \times \frac{98}{100} = \frac{1}{100}$	$\frac{97}{100}$
...			

Finalement, Julie a bu quatre-vingt-dix-neuf fois un centième de son café :

$$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100}\right) \times 200 \text{ mL} = \frac{99}{100} \times 200 \text{ mL} = 198 \text{ mL}$$

2. Dans le cas d'hier où Julie a commencé par boire la moitié de son café, on peut caractériser les différentes étapes à l'aide du tableau ci-dessous :

Etape	Disponible	Bu	Restant
1	1	$\frac{1}{2} \times 1$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$
...			

Finalement, au bout des quatre-vingt-dix-neuf étapes, il restera dans la tasse de Julie $\frac{1}{100}$ de son contenu initial, soit 2 mL.

L'égalité peut alors s'interpréter comme : la quantité de café bue est égale à la quantité de café initiale moins la quantité de café restante.

3. D'une façon générale, pour k, on peut construire un même tableau :

Etape	Disponible	Bu	Restant
1	1	$\frac{1}{2^k} \times 1$	$1 - \frac{1}{2^k}$
2	$1 - \frac{1}{2^k}$	$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{3^k}$	$1 - \frac{1}{2^k} - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{3^k} = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$
3	$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$	$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) \frac{1}{4^k}$	$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\left(1 - \frac{1}{4^k}\right)$
	...		

Finalement, il restera dans la tasse de Julie :

$$\prod_{n=2}^{100}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\times 200\text{ mL}=\prod_{n=2}^{100}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\prod_{n=2}^{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\times 200\text{ mL}$$

$$=\frac{1}{100}\times\frac{101}{2}\times 200\text{ mL}=101\text{ mL}$$

Dans l'autre sens, on a aussi :

Etape	Disponible	Bu	Restant
1	1	$\frac{1}{100^k}\times 1$	$1-\frac{1}{100^k}$
2	$1-\frac{1}{100^k}$	$\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\frac{1}{99^k}$	$1-\frac{1}{100^k}-\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\frac{1}{99^k}=\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\left(1-\frac{1}{99^k}\right)$
3	$\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\left(1-\frac{1}{99^k}\right)$	$\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\left(1-\frac{1}{99^k}\right)\frac{1}{98^k}$	$\left(1-\frac{1}{100^k}\right)\left(1-\frac{1}{99^k}\right)\left(1-\frac{1}{98^k}\right)$
	...		

Finalement :

$$\prod_{n=2}^{100}\left(1-\frac{1}{n^k}\right)=\prod_{n=100}^{2}\left(1-\frac{1}{n^k}\right)$$

C'est évidemment le même produit, ce qui permet de répondre aux deux dernières questions. Julie a donc bu 99 mL et la façon de procéder ne change pas la quantité de café bu.