OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES session 2012
Correction

CLASSE DE PREMIERE

Mars 2012

1 Nombres *digisibles*

1. 12, 15, 24, 36, 48... et c'est tout. En effet, si le nombre commence par :

   - 1 : le deuxième chiffre doit être un diviseur de ce nombre : 12, 15 sont les deux seuls.
   - 2 : le nombre est forcément pair, donc 24 divisible par 4, 26 n'est pas divisible par 6 et 28 n'est pas divisible par 8.
   - 3 : la somme des chiffres doit être multiple de 3, le deuxième chiffre est donc 3, 6 ou 9 ; on retiendra 36.
   - 4 : le nombre formé par les deux chiffres doit être divisible par 4 : seul 48 est à retenir.
   - 5 : le nombre doit se terminer par 0 ou 5 ; chacun est à rejeter.
   - 6 : le nombre doit être pair et la somme de ses chiffres être un multiple de 3 ; aucun nombre ne peut être retenu.
   - 7 : les seuls nombres divisibles par 7 seraient 70 et 77 qui ne peuvent être retenus.
   - 8 : les seuls nombres divisibles par 8 seraient 80 et 88, là encore à rejeter.
   - 9 : de même 90 et 99 ne peuvent être retenus.

   L'algorithme :

   Pour i allant de 11 à 99 faire

       a chiffre des dizaines de i

       b chiffre des unités de i

       si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a \neq b$ et i mod $a = 0$ et i mod $b = 0$ alors

           Retenir i

   Afficher tous les i retenus

   Son implémentation en Python donne bien le résultat attendu :

```
 from math import *
l=[]
for i in range(11,100):
    a=i%10
    b=(i-i%10)/10
    if a!=0 and b!=0:
        if a!=b:
            if i%a==0 and i%b==0:
                l.append(i)
print(l)
```

   [12, 15, 24, 36, 48]

2. Pour en trouver un, on peut commencer par 1 comme chiffre des milliers, puis compléter progressivement par les chiffres suivants :

   12.. le nombre doit se terminer par 4, 6 ou 8 ;

   12.4 : le nombre formé par les deux derniers chiffres doit être un multiple de 4 : seul 1284 répond à cette condition, mais n'étant pas divisible par 8 est à rejeter.

   12.6 : le nombre doit être divisible par 3, donc le chiffre manquant doit être multiple de 3 : 3 ou 9 ; comme 1236 est divisible par 1, 2, 3 et 6, il convient.

   Ou bien : le premier nombre à quatre chiffres qui peut prétendre à être digisible est 1234 (qui ne convient pas puisque non divisible par 4) le suivant 1235 ne convient pas puisque non divisible par 3 mais le suivant 1236 est digisible !

   L'algorithme précédent peut être complété :

   Pour i allant de 1234 à 9876 faire

       a chiffre des milliers de i

b chiffre des centaines de i

c chiffre des dizaines de i

d chiffre des unités de i

si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ et $d \neq 0$ et $a \neq b$ et et $a \neq c$ et $a \neq d$ et $b \neq c$ et $b \neq d$ et $c \neq d$ et i mod $a = 0$ et i mod $b = 0$ et i mod $c = 0$ et i mod $d = 0$ alors

afficher i

Afficher le premier i retenu

3. (a) Si le nombre digisible s'écrit avec un 5, il doit être divisible par 5 donc se terminer par 5 ou 0 ; comme 0 ne peut pas être un chiffre d'un nombre digisible, il doit nécessairement se terminer par 5.
   (b) Comme ce nombre se termine par un 5, il est impair et ne sera divisible par aucun nombre pair. Ses chiffres sont donc tous impairs.
   (c) Les chiffres qui peuvent être utilisés sont donc 1, 3, 7 et 9 (et le 5 comme chiffre des unités) ; il a donc au plus 5 chiffres. Supposons qu'il existe un nombre digisible de cinq chiffres se terminant par 5, alors la somme de ses chiffres sera 25 qui n'est ni un multiple de 3 ni de 9 ; ce qui est contradictoire avec le fait qu'il soit digisible. Un nombre digisible contenant un 5 a donc au plus quatre chiffres.
   (d) Pour obtenir le nombre le plus grand, on peut commencer avec 9 comme chiffre des milliers. Le nombre s'écrirait $9ab5$, a et b étant à choisir dans l'ensemble $\{1, 3, 7\}$. Comme pour être divisible par 9 la somme des chiffres doit être un multiple de 9, $a + b + 5$ doit être un multiple de 9 : comme 18 ne pourra être atteint, $a + b + 5 = 9$, par conséquent $a + b = 4$ et $a = 3$ et $b = 1$; 9315 est la solution cherchée.

   Une petite modification de l'algorithme précédent donne tous les nombres digisibles à quatre chiffres et confirme ce résultat :

```
  from math import *
l=[]
for i in range(1234,9876):
    a=(i-i%1000)/1000
    b=(i-a*1000-(i-a*1000)%100)/100
    c=(i-a*1000-b*100-(i-a*1000-b*100)%10)/10
    d=i-a*1000-b*100-c*10
    if a!=0 and b!=0:
        if c!=0 and d!=0:
            if a!=b and a!=c:
                if a!=d and b!=c:
                    if b!=d and c!=d:
                        if i%a==0 and i%b==0:
                            if i%c==0 and i%d==0:
                                l.append(i)
print(l)
```

   [1236, 1248, 1296, 1326, 1362, 1368, 1395, 1632, 1692, 1764, 1824, 1926, 1935, 1962, 2136, 2184, 2196, 2316, 2364, 2436, 2916, 3126, 3162, 3168, 3195, 3216, 3264, 3276, 3492, 3612, 3624, 3648, 3816, 3864, 3915, 3924, 4128, 4172, 4236, 4368, 4392, 4632, 4872, 4896, 4932, 4968, 6132, 6192, 6312, 6324, 6384, 6432, 6912, 6984, 8136, 8496, 8736, 9126, 9135, 9162, 9216, 9315, 9324, 9432, 9612, 9648, 9864]

4. (a) D'après la question précédente, un nombre digisible ayant plus de quatre chiffres ne peut contenir de 5. Il reste 8 chiffres disponibles : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Supposons qu'un nombre digisible s'écrive avec 8 chiffres, il faudra tous les utiliser. Or la somme 1+2+3+4+6+7+8+9=40 n'est pas un multiple de 3, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il soit digisible.

   Conclusion : un nombre digisible a au plus 7 chiffres.
   (b) Soit n un nombre digisible à 7 chiffres comportant un 9. La somme des six chiffres restant est un multiple de 9. Or :
   - 1+2+3+4+6+7 = 23
   - 1+2+3+4+6+8=24
   - 1+2+3+4+7+8=25

- 1+2+3+6+7+8=27
- 1+2+4+6+7+8=28
- 1+3+4+6+7+8=29
- 2+3+4+6+7+8=30

La seule somme qui soit un multiple de 9 est composée des chiffres : 1, 2, 3, 6, 7, et 8 ; ce sont donc les six chiffres manquants.

Une autre preuve, plus rapide peut aussi être proposée : $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ n'est pas divisible par 9, et pour que cette somme devienne divisible par 9, il faut enlever au moins 4, car 36 est divisible par 9.

(c) Il s'agit de bien placer les sept chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

Ce nombre doit évidemment être pair donc se terminer par 2, 6 ou 8.

Pour obtenir le plus grand, si on commence par 9876..., il doit se terminer par 2 : 9876..2 : 9876312 (non divisible par 7) ou 9876132 (non divisible par 8).

Au mieux il peut commencer par 987.... et se terminer par 2 ou 6. On doit donc tester :

9871326 (non divisible par 7)
9871236 (non divisible par 7)
9871362 (non divisible par 7)
9871632 (non divisible par 7)
9872316 (non divisible par 7)
9872136 (non divisible par 7)
9873126 (non divisible par 7)
9873162 (non divisible par 7)
9873216 (non divisible par 7)
9873612 (non divisible par 8)

Le nombre cherché peut donc commencer par 986 ; il reste à placer : 1, 2, 3, 7

Le plus grand serait : 9867312 ; comme il est bien divisible par tous ses chiffres, c'est le plus grand nombre digisible.

Il faut un peu améliorer l'algorithme pour obtenir la liste de tous les nombres digisibles :

```
 from math import *

def Anp(n,p,l=None,rep=None):
    if l is None:l=[]
    if rep is None:rep=[]
    if p==0:
        rep.append(l)
        return
    for k in range(1,n+1):
        if k not in l:
            l1=list(l)
            l1.append(k)
            Anp(n,p-1,l1,rep)
    return rep

def digisible(n):
    mot_n=str(n)
    for i in range(0,len(mot_n)):
        if n%int(mot_n[i])!=0:
            return 1
    return 0
def lance():
    l=[]
    for i in range(2,8):
        for k in Anp(9,i):
            nb=0
```

```
            for j in range(0,len(k)):
                nb=nb+10**j*k[j]
            if digisible(nb)==0:
                l.append(nb)
    return l
resultat=lance()
print sorted(resultat)
```

[12, 15, 24, 36, 48, 124, 126, 128, 132, 135, 162, 168, 175, 184, 216, 248, 264, 312, 315, 324, 384, 396, 412, 432, 612, 624, 648, 672, 728, 735, 784, 816, 824, 864, 936, 1236, 1248, 1296, 1326, 1362, 1368, 1395, 1632, 1692, 1764, 1824, 1926, 1935, 1962, 2136, 2184, 2196, 2316, 2364, 2436, 2916, 3126, 3162, 3168, 3195, 3216, 3264, 3276, 3492, 3612, 3624, 3648, 3816, 3864, 3915, 3924, 4128, 4172, 4236, 4368, 4392, 4632, 4872, 4896, 4932, 4968, 6132, 6192, 6312, 6324, 6384, 6432, 6912, 6984, 8136, 8496, 8736, 9126, 9135, 9162, 9216, 9315, 9324, 9432, 9612, 9648, 9864, 12384, 12648, 12768, 12864, 13248, 13824, 13896, 13968, 14328, 14728, 14832, 16248, 16824, 17248, 18264, 18432, 18624, 18936, 19368, 21384, 21648, 21784, 21864, 23184, 24168, 24816, 26184, 27384, 28416, 29736, 31248, 31824, 31896, 31968, 32184, 34128, 36792, 37128, 37296, 37926, 38472, 39168, 39816, 41328, 41832, 42168, 42816, 43128, 43176, 46128, 46872, 48216, 48312, 61248, 61824, 62184, 64128, 68712, 72184, 73164, 73248, 73416, 73962, 78624, 79128, 79632, 81264, 81432, 81624, 81936, 82416, 84216, 84312, 84672, 87192, 89136, 89712, 91368, 91476, 91728, 92736, 93168, 93816, 98136, 123648, 123864, 123984, 124368, 126384, 129384, 132648, 132864, 132984, 134928, 136248, 136824, 138264, 138624, 139248, 139824, 142368, 143928, 146328, 146832, 148392, 148632, 149328, 149832, 162384, 163248, 163824, 164328, 164832, 167328, 167832, 168432, 172368, 183264, 183624, 184392, 184632, 186432, 189432, 192384, 193248, 193824, 194328, 194832, 198432, 213648, 213864, 213984, 214368, 216384, 218736, 219384, 231648, 231864, 231984, 234168, 234816, 236184, 238416, 239184, 241368, 243168, 243768, 243816, 247968, 248136, 248976, 261384, 263184, 273168, 281736, 283416, 284136, 291384, 293184, 297864, 312648, 312864, 312984, 314928, 316248, 316824, 318264, 318624, 319248, 319824, 321648, 321864, 321984, 324168, 324816, 326184, 328416, 329184, 341928, 342168, 342816, 346128, 348192, 348216, 348912, 349128, 361248, 361824, 361872, 362184, 364128, 364728, 367248, 376824, 381264, 381624, 382416, 384192, 384216, 384912, 391248, 391824, 392184, 394128, 412368, 413928, 416328, 416832, 418392, 418632, 419328, 419832, 421368, 423168, 423816, 427896, 428136, 428736, 431928, 432168, 432768, 432816, 436128, 438192, 438216, 438912, 439128, 461328, 461832, 463128, 468312, 469728, 478296, 478632, 481392, 481632, 482136, 483192, 483216, 483672, 483912, 486312, 489312, 491328, 491832, 493128, 498312, 612384, 613248, 613824, 613872, 614328, 614832, 618432, 621384, 623184, 623784, 627984, 631248, 631824, 632184, 634128, 634872, 641328, 641832, 643128, 648312, 671328, 671832, 681432, 684312, 689472, 732648, 732816, 742896, 746928, 762384, 768432, 783216, 789264, 796824, 813264, 813624, 814392, 814632, 816432, 819432, 823416, 824136, 824376, 831264, 831624, 832416, 834192, 834216, 834912, 836472, 841392, 841632, 842136, 843192, 843216, 843912, 846312, 849312, 861432, 864312, 873264, 891432, 894312, 897624, 912384, 913248, 913824, 914328, 914832, 918432, 921384, 923184, 927864, 931248, 931824, 932184, 934128, 941328, 941832, 943128, 948312, 976248, 978264, 981432, 984312, 1289736, 1293768, 1369872, 1372896, 1376928, 1382976, 1679328, 1679832, 1687392, 1738296, 1823976, 1863792, 1876392, 1923768, 1936872, 1982736, 2137968, 2138976, 2189376, 2317896, 2789136, 2793168, 2819376, 2831976, 2931768, 2937816, 2978136, 2983176, 3186792, 3187296, 3196872, 3271968, 3297168, 3298176, 3619728, 3678192, 3712968, 3768912, 3796128, 3816792, 3817296, 3867192, 3869712, 3927168, 3928176, 6139728, 6379128, 6387192, 6389712, 6391728, 6719328, 6719832, 6731928, 6893712, 6913872, 6971328, 6971832, 7168392, 7198632, 7231896, 7291368, 7329168, 7361928, 7392168, 7398216, 7613928, 7639128, 7829136, 7836192, 7839216, 7861392, 7863912, 7891632, 7892136, 7916328, 7916832, 7921368, 8123976, 8163792, 8176392, 8219736, 8312976, 8367912, 8617392, 8731296, 8796312, 8912736, 8973216, 9163728, 9176328, 9176832, 9182376, 9231768, 9237816, 9278136, 9283176, 9617328, 9617832, 9678312, 9718632, 9723168, 9781632, 9782136, 9812376, 9867312]

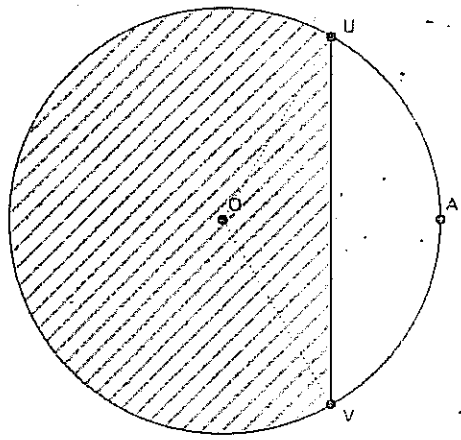
Plus proche ...

Partie I

1) et 2)

On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].

On hachure … noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.



3) Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?

L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).

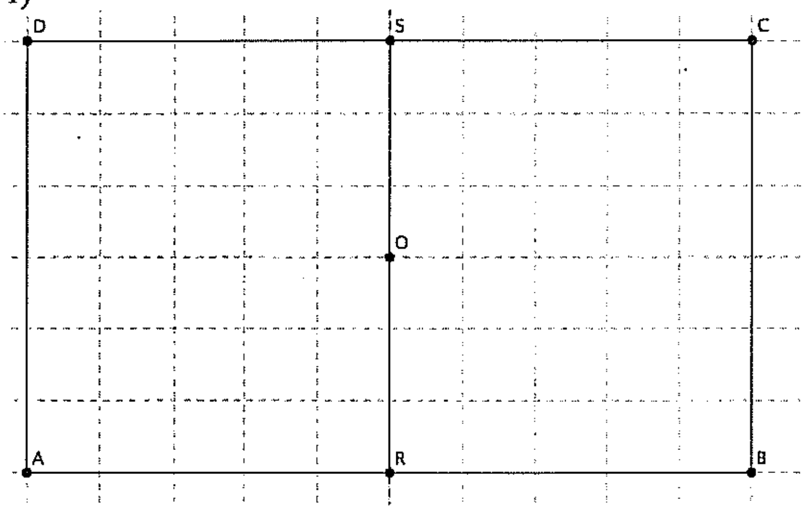
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.

L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

La probabilité : $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; 80,5 % environ.

Partie II

1)



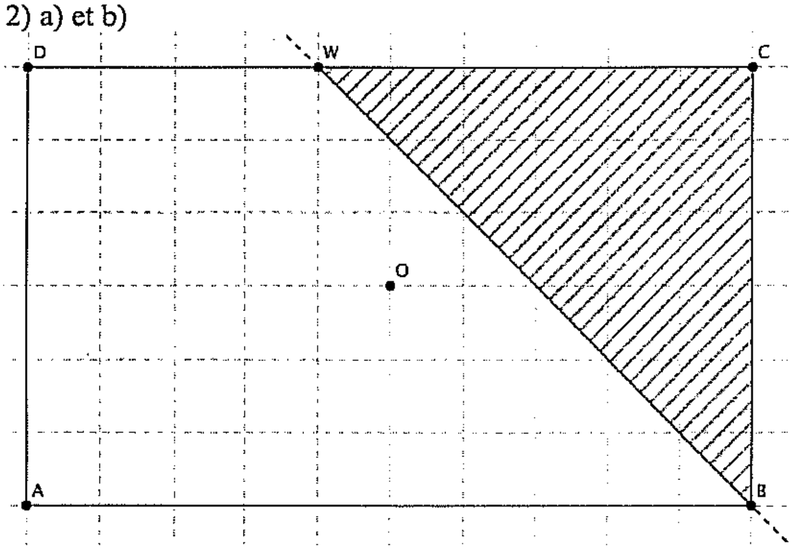
La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S . Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].

Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].

Son aire est la moitié de celle du rectangle.

Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %.

2) a) et b)



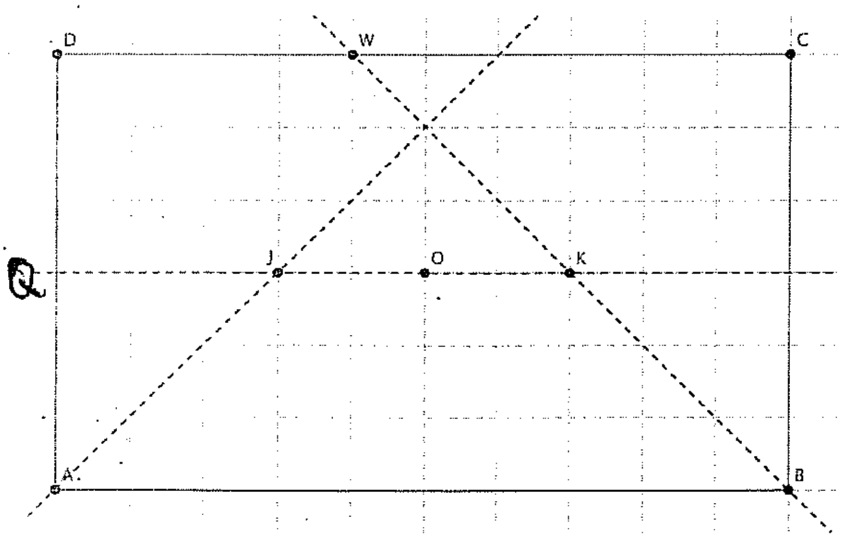
La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].

Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

Son aire : 72 cm^2.

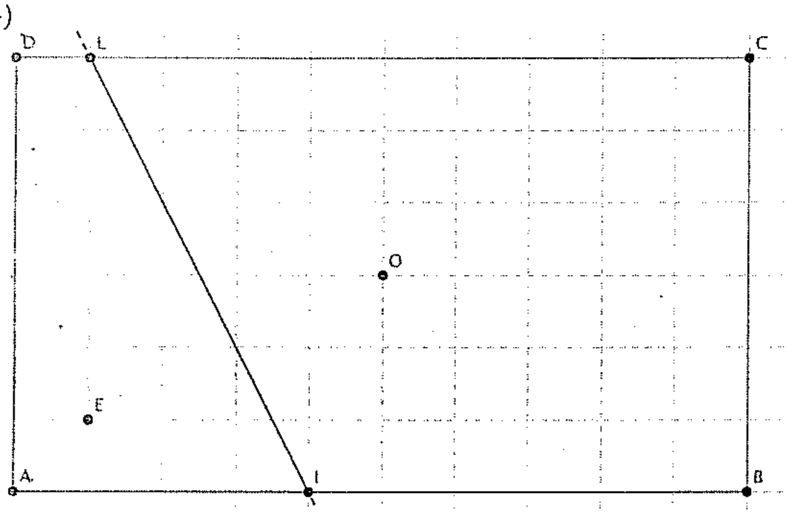
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle : $\frac{3}{10}$; 30 %.

3)



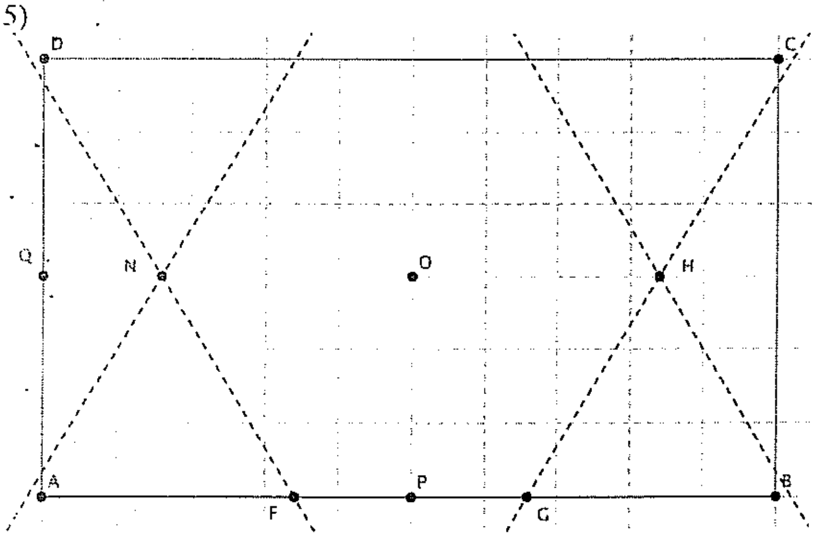
Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA].
Son aire : 84 cm^2.
Probabilité : $\frac{7}{20}$; 35 %.

4)



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.
De même DL = 2.
L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : 60 cm^2.
La probabilité : $\frac{3}{4}$; 75 %.

5)

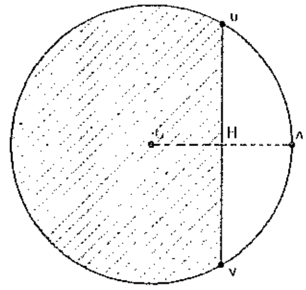


On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N … situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange).
Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).
Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.
L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.
Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

1.

2. On représente le segment $[UV]$ intersection de la médiatrice du segment $[OA]$ avec le disque. Noter que les points du segment $[UV]$ ne sont pas dans l'ensemble hachuré.

3. On cherche le rapport de l'aire hachurée à celle du disque.



$$OU = OV = AU = AV = R$$

Donc les angles $\widehat{UOA}$ et $\widehat{AOV}$ mesurent 60°.

D'où $OH = \frac{1}{2}R$, $UH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ et $UV = \sqrt{3}R$

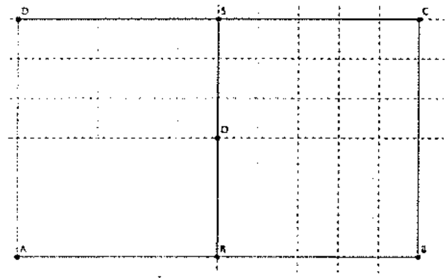
Aire du grand secteur angulaire UOV : $\frac{2}{3}\pi R^2$

Aire du triangle OUV : $\frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$

Aire de la zone hachurée : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$

Probabilité cherchée : $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ environ 0,8044...

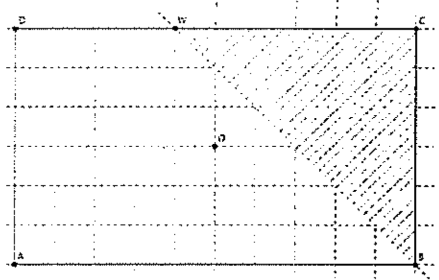
Partie II



1. Le rectangle $RBCS$ est l'ensemble des points plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$ et son aire est la moitié de celle du rectangle $ABCD$; la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}$.

2. (a)

   (b)

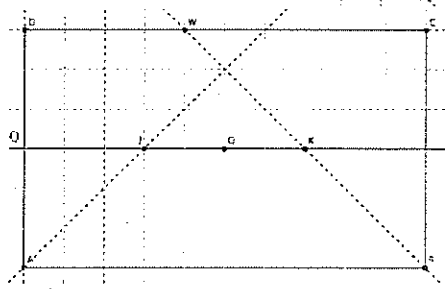
   

   (c) La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment $[CD]$ en W. Le segment $[BW]$ représente l'ensemble des points du rectangle équidistants des côtés $[BC]$ et $[AB]$.

   Le triangle BCW est rectangle et isocèle. Ce triangle, excepté le segment $[BW]$ est l'ensemble des points plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.

   Aire du triangle : 72 cm^2.

   La probabilité cherchée est alors de $\frac{3}{10}$

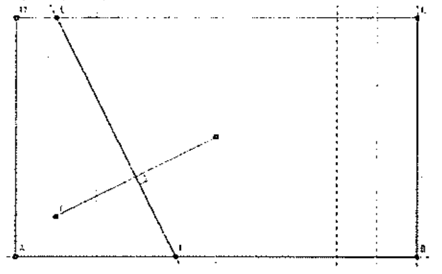


3. Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A et la médiatrice du segment $[BC]$ déterminent le trapèze $ABKJ$ qui est l'ensemble des points plus proches de $[AB]$ que des trois autres côtés du rectangle, exception faite des côtés $[BK]$, $[KJ]$ et $[JA]$.

   On a $QJ = QA = 6$ donc $OJ = 10 - 6 = 4$ et $JK = 8$.

   Aire du trapèze : 84 cm^2.

   Probabilité cherchée : $\frac{7}{20}$

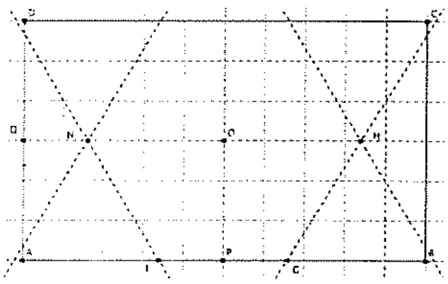


4. La médiatrice du segment $[OE]$ détermine les points I et L respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$.

   On utilise le repère orthonormé d'origine O dans lequel $A(-10, -6)$ et $E(-8, -4)$. Le coefficient directeur de la droite (OE) est 0,5 donc la droite (LI) a une équation de la forme $y = -2x + p$ et passe par le milieu de $[OE]$; ce qui donne $p = -10$. D'où : $L(-8, 6)$ et $I(-2, -6)$. On en déduit que $CL = 18$ et $BI = 12$. L'aire du trapèze $IBCL$ est alors 180 cm^2 et la probabilité cherchée : $\frac{3}{4}$

4-5 Les médiatrices des segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ déterminent un hexagone, l'ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C et D.

La médiatrice du segment $[AO]$ coupe $[AB]$ en F et coupe la médiatrice de $[OD]$ en N qui est situé sur l'axe médian du rectangle.



L'aire de l'hexagone est égale à quatre fois celle du trapèze $FPON$ pour des raisons de symétrie.

La médiatrice de $[OA]$ a une équation de la forme $y = -\frac{5}{3}x + q$ et elle passe par le milieu de $[OA]$, ce qui donne $q = -\frac{34}{3}$.

D'où l'abscisse de F : $-\frac{16}{5}$ et celle de N : $-\frac{34}{5}$.

On en déduit : $ON = \frac{34}{5}$ et $PF = \frac{16}{5}$.

$\frac{ON+PF}{2} = 5$

Aire du trapèze $OPFN$: 30 cm^2.

Aire de l'hexagone : 120 cm^2.

Probabilité cherchée : $\frac{1}{2}$

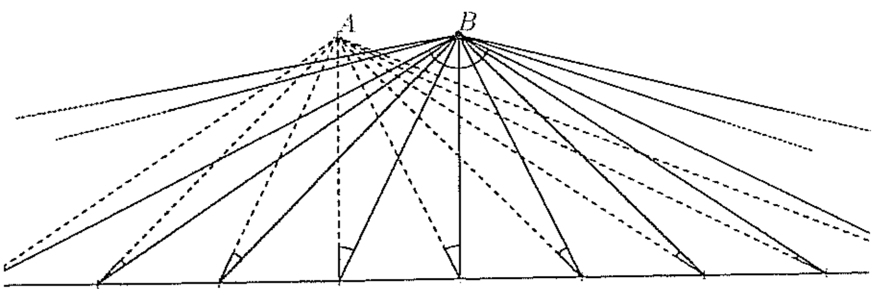
3 Les éoliennes

1. 4 s

2. Appelons C le point d'intersection des deux diagonales du parallélogramme $ABX'X$; comme $XX' = AB = \frac{1}{2}XB$, CXX' est un triangle rectangle isocèle. Donc $\widehat{XCX'}$ vaut $\frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{BCX'}$ vaut $\frac{3\pi}{4}$; comme enfin l'angle $\widehat{AXB}$ est égal, comme angle alterne interne, à $\widehat{XBX'}$, la somme des deux angles qui nous intéresse vaut $\frac{\pi}{4}$ ou 45°.

3. $\frac{\pi}{2}$ ou 90° par symétrie.

4. Lorsque Zoé se trouve en une position Z_i, notons α_i l'angle $\widehat{AZ_iB}$. Lorsque Zoé a parcouru 100m, elle se trouve dans la position Z_{i+1} et Z_iABZ_{i+1} est un parallélogramme et l'angle α_i est égal à l'angle $\widehat{Z_iBZ_{i+1}}$. Ainsi, tous les angles α_i se retrouvent comme des angles adjacents de sommet B, comme illustré sur la figure ci-dessous. Quelque soient les points de départ et de fin des mesures, la somme de ces angles est inférieure à un angle plat. Cqfd.



Une autre solution, très élégante serait de considérer l'observateur immobile et les éoliennes se déplaçant à 90km/h dans le sens inverse du déplacement du train ; dans ce cas là, tous les angles considérés ont pour sommet Z (position immobile de Zoë) et sont adjacents ; le point Z étant à l'extérieur de la droite des éoliennes, la somme des angles est inférieure à l'angle plat.

4 Duels tétraédriques

1. Antoine !

2. (a) Un arbre ou un tableau à double entrée donnent, sur les seize résultats (a, b) possibles, deux couples (1,4), deux couples (1,5), six couples (6,4) et six couples (6,5).
   Antoine gagne donc contre Baptiste avec une probabilité égale à $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
   (b) Baptiste gagne contre Cyril avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$, Cyril gagne contre Diane avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$, et Diane gagne contre Antoine avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$. On peut remarquer que toutes ces probabilités sont supérieures à $\frac{1}{2}$.

3. On peut utiliser les résultats des duels Antoine-Baptiste et Cyril-Diane pour trouver le nombre de quadruplets (a, b, c, d) de chaque sorte parmi les 256 possibles.
   (a) Baptiste gagne quand les quadruplets (a, b, c, d) sont (1,4,3,2) (il y en a 12) ou (1,5,3,2) (il y en a aussi 12). Donc Baptiste gagne avec une probabilité égale à $\frac{12+12}{256} = \frac{3}{32}$.
   (b) Antoine gagne quand les quadruplets sont (6,4,3,2) (au nombre de 36) ou (6,5,3,2) (également au nombre de 36). Donc Antoine gagne avec une probabilité égale à $\frac{36+36}{256} = \frac{9}{32}$.
   Diane, quant à elle, gagne quand les quadruplets sont (1,4,3,7) ou (1,5,3,7) au nombre de 12 chacun ou (6,4,3,7) ou (6,5,3,7) au nombre de 36 chacun.
   La probabilité que Diane gagne est alors $\frac{12+12+36+36}{256} = \frac{12}{32}$.
   Finalement, on en déduit que Cyril gagne avec une probabilité égale à $1 - \left(\frac{3}{32} + \frac{9}{32} + \frac{12}{32}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
   C'est donc Diane qui a le plus de chance de gagner à ce jeu.

4. (a) $a_2 < b_2$ donc $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_3 \leq b_4$. Les six résultats (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_4) donnent Baptiste gagnant. Sur les seize résultats possibles, il y en a donc moins de dix qui donnent Antoine gagnant.
   La probabilité pour qu'Antoine gagne est donc inférieure à $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.
   (b) Pour avoir cette situation, il faudrait, d'après ce qui précède que $a_2 \geq b_2$, c'est à dire $a_2 > b_2$ puisqu'un même nombre ne peut être présent sur deux dés différents. Puis, $b_2 > c_2$, $c_2 > d_2$ et $d_2 > a_2$: ce qui est impossible. De tels dés ne peuvent donc pas exister.
   (c) Les résultats de la question 2 peuvent faire penser à changer uniquement le dé de Baptiste.
   Si $b_1 > 1$, dans le duel Antoine contre Baptiste, les quatre couples $(1, b_1)$, $(1, b_2)$, $(1, b_3)$, $(1, b_4)$ donnent Baptiste gagnant. Il s'en suit que le nombre de couples qui donnent Antoine gagnant est multiple de 3, et ne peut donc pas être égal à 10. On en déduit alors que $b_1 = 0$.
   b_2 ne peut être supérieur à 6. On peut poser $b_2 = b_3 = 4$; dans ces conditions, b_4 doit être supérieur à 6, par exemple : $b_4 = 9$.
   Une dernière vérification montre que ces dés conviennent pour le duel de Baptiste contre Cyril.
   Cette configuration des quatre dés répond à la question, mais n'est bien sûr pas unique !