Exercice commun 1 Les nombres Harshad

On notera dans le corrigé s(n) la somme des chiffres de l'entier n.

1.a) 364 est divisible par 3+ 6 + 4 = 13.

b) 11 est le plus petit entier qui ne soit pas de Harshad.

2. a) 1000 par exemple.

b) 10^{n-1} par exemple.

3. a) 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs

b) 1**0**10 ; 1**0**11 ; 1**0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs.

c) 1**0…0**10 ; 1**0…0**11 ; 1**0…0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de 0 que l'on veut).

4. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 = 982080. Sa somme de chiffres est 27.

b) 98208030 = 98208000 + 30 est divisible par s(98208030) = 27 + 3 = 30.

idem pour les trois suivants.

c) 98208**0…0**30 ; etc. forment une liste de quatre Harshad consécutifs.

5. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 × 34 = 33390720 a pour somme de chiffres 27.

3339072030 ; 3339072031 ; 3339072032 ; 3339072033 ; 3339072034 sont cinq nombres de Harshad consécutifs/

b) 3339072**0…0**30 ; etc. forment une liste de cinq Harshad consécutifs.

6 .a) s(p + 2) = s(p) – i – 9 + (i + 1) + 1 = s(p) – 7 donc s(p) et s(p + 2) sont de parités différentes.

p et p + 2 sont tous les deux impairs, donc ne sont pas divisibles par 2.

L'un de ces nombres a une somme de chiffres paire, il ne peut donc pas être Harshad.

b) Les couples de terminaisons incompatibles sont :

09-11 ; 19-21 ; … ; 89-91.
Le plus grand « vide » possible est la série 90 ; 91 ; … ; 09 ; 10 qui a une longueur 21.

Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.

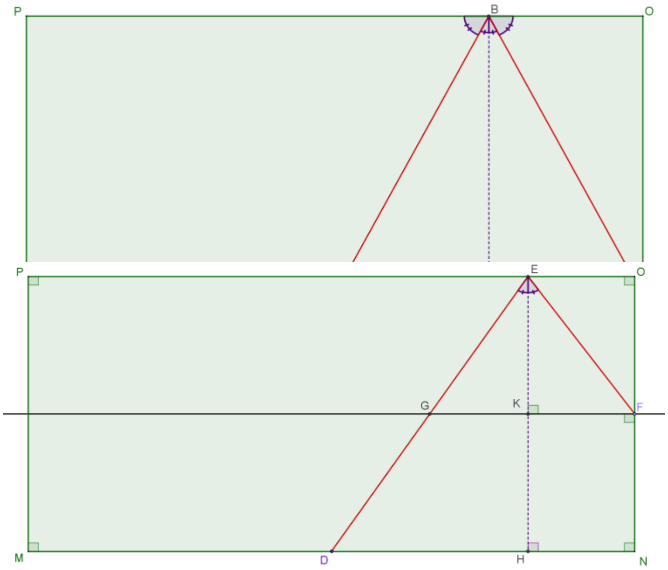
Remarque : le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile).

Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont

44 363 342 786 chiffres…

Exercice commun 2 Un billard rectangulaire

1. La bille est placée initialement en D, milieu de $[MN]$.
   a. Si on vise un point B du rail $[PO]$ et que la bille atteint N, suivant les règles de la réflexion, la perpendiculaire à $[PO]$ en B est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBN}$ et confondue avec la hauteur issue de B dans le triangle ABN.
   Le triangle DBN est donc isocèle en B, et la droite (HN) est la médiatrice de $[DN]$ ($DN = \frac{300}{2} = 150$ cm).
   Il faut donc viser le point B du segment $[PO]$ situé à 75 cm de O ($DH = HN = BO$.)



   b. Quel point du rail $[PO]$ faut-il viser pour que la bille atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?

Le point E étant le point du rail $[PO]$ visé, le point F étant le milieu du rail $[NO]$ à atteindre, le point G étant le point d'intersection de la médiatrice du segment $[NO]$ et du segment $[DE]$, par les arguments précédents, on a cette fois :

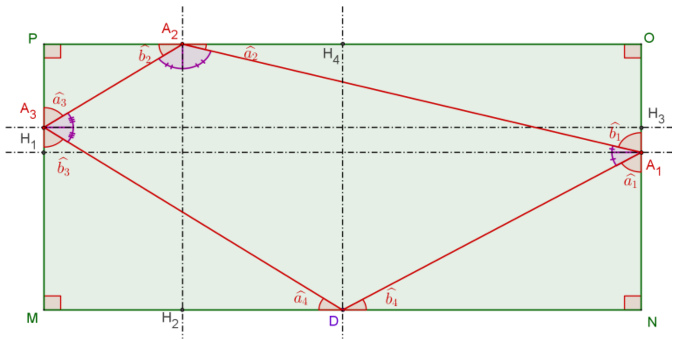
GEF isocèle en E et $GK = KF$.

Par ailleurs, dans le triangle DEH, $G \in [DE]$, K est le milieu de $[EH]$, et $(GK)//(DH)$, donc, par la réciproque du théorème des milieux, $DH = 2GK$.

Enfin, $EO = HN = KF = GK$ et $DN = DH + HN$, donc : $EO = \frac{DN}{3} = \frac{150}{3} = 50$ cm.

Il faut donc viser le point E du segment $[PO]$ situé à 50 cm de O.

   c. Quel point du rail $[NO]$ faut-il viser pour que la bille revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après avoir touché exactement trois rails) ?



Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail $[NO]$, puis de vérifier que cette trajectoire convient.
On peut cependant montrer que c'est l'unique solution (la démonstration permettra ensuite de répondre immédiatement à la question 2.b.) :

Considérons une hypothétique trajectoire à trois bandes dans laquelle la bille part de D, touche les rails en $A_1 \in [NO]$, $A_2 \in [OP]$, $A_3 \in [PM]$ puis revient en D.

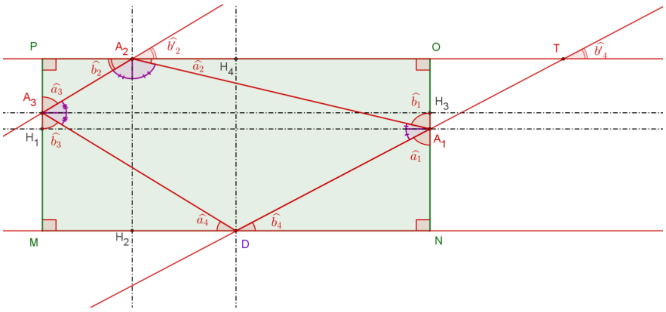
Les droites en traits tiretés sont des perpendiculaires aux rails.

Par les règles de la réflexion, tous les angles d'un même couple $(\widehat{a_i}; \widehat{b_i})$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont de même mesure car leurs complémentaires sont de même mesure.
Mais aussi en tant que couple d'angles aigus aux sommets d'un même triangle rectangle, chaque couples $(\widehat{b_i}; \widehat{a_{i+1}})$ $(1 \leq i \leq 3)$ est aussi un couple d'angles complémentaires. Et il en est de même pour le couple $(\widehat{b_4}; \widehat{a_1})$.
Il s'ensuit les égalités :

$$(1)\ \widehat{b_4} = \widehat{a_2} = \widehat{b_2} = \widehat{a_4} \quad \text{et} \quad \widehat{a_1} = \widehat{b_1} = \widehat{a_3} = \widehat{b_3}.$$

Par ailleurs, en considérant les droites parallèles (PO) et (MN), et la droite (D, A_1) sécante à (MN) en D, et à (PO) en T, on a l'égalité des mesures des angles correspondants $\widehat{b_4'}$ et $\widehat{b_4}$.
Et en considérant les droites (PO) et (A_2A_3), on a l'égalité des mesures des angles aux sommets $\widehat{b_2'}$ et $\widehat{b_2}$.
En combinant avec les égalités (1), il vient que $\widehat{b_2'} = \widehat{b_4'}$, c'est-à-dire qu'on a une égalités des mesures des angles correspondants relativement aux droites (DA_1) et (A_2A_3) coupées par la sécante (PO).
On en déduit que les côtés opposés $[DA_1]$ et $[A_2A_3]$ dans le quadrilatère $DA_1A_2A_3$ sont parallèles.
On montre de même que les côtés opposés $[A_1A_2]$ et $[A_3D]$ sont parallèles.

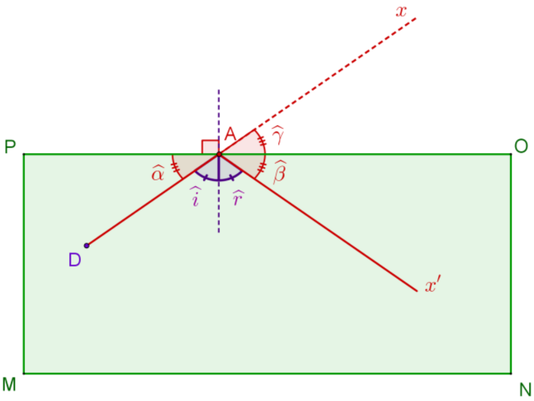
La trajectoire fermée en trois bandes D, A_1, A_2, A_3 forme donc un parallélogramme.



Le point D étant le milieu de $[MN]$, et les angles $\widehat{a_4}$ et $\widehat{b_4}$ même mesure, les triangles rectangles DNA_1 et DMA_3 sont symétriques par rapport à la médiatrice du rail $[MN]$, ce qui donne l'égalité des longueurs DA_1 et DA_3. Le parallélogramme $DA_1A_2A_3$ est donc un losange.
Les triangles DNA_1 et A_1OA_2 étant rectangles et semblables car $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$ et $\widehat{b_4} = \widehat{a_2}$, comme aussi leurs hypoténuses sont de même longueur ($DA_1 = A_1A_2$, côtés consécutifs du losange $DA_1A_2A_3$), les côtés NA_1 et A_1O sont de même longueur.

On en conclut que le point N est nécessairement le milieu du rail $[NO]$, c'est le point qu'il faut viser.
Les résultats précédents assurent que suivant les règles de la réflexion, la bille retournera en D.

2. La construction de la trajectoire de la bille au-delà d'un rebond, conformément aux règles de la réflexion peut se faire par symétrie axiale par rapport au rail heurté.
Ainsi, si la bille part d'un point D et heurte un rail en A, sa poursuite de trajectoire (demi-droite $[A, x'')$ est le symétrique de la demi-droite $[Ax)$, prolongement du segment $[DA]$:

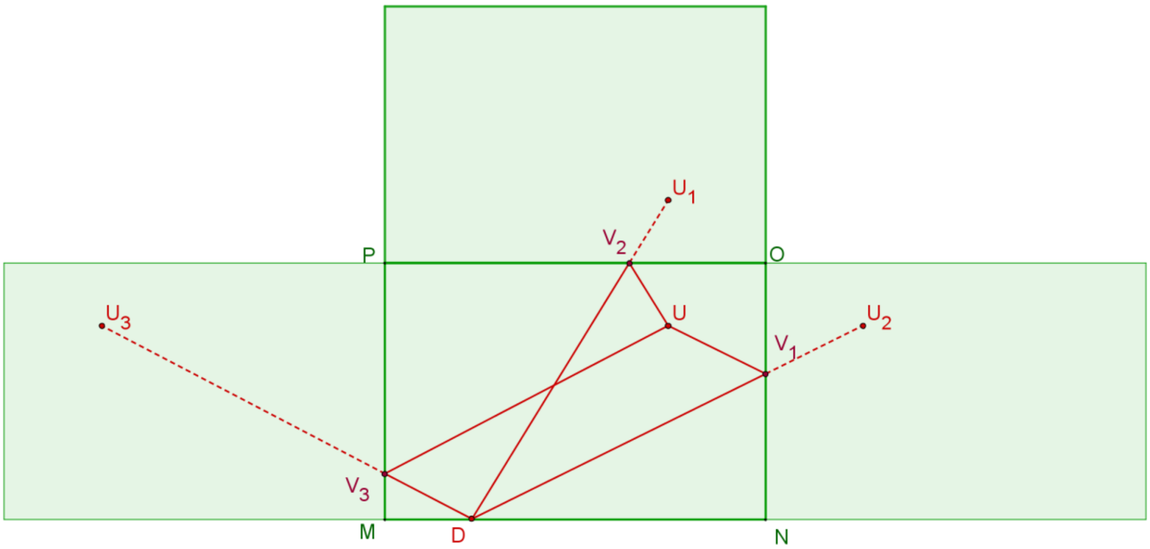


En effet, suivant les lois de la réflexion, les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, complémentaires respectifs des angles de même mesure $\hat{\imath}$ et $\hat{r}$, sont encore de même mesure, tandis que les angles $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont de même mesure, par symétrie.

En cas de rebonds multiples, on peut, de la même façon, obtenir la trajectoire complète, en multipliant les symétries à partir du prolongement rectiligne de la trajectoire initiale.

Ceci permet de répondre aisément aux questions 1.a., 1.b. et 1.c. et plus encore aux questions 2.a. et 2.b.

a. On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.



Sur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, atteindre le point U en une bande sur l'un de ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit.
Il y a sur cet exemple trois façons d'atteindre le point U.

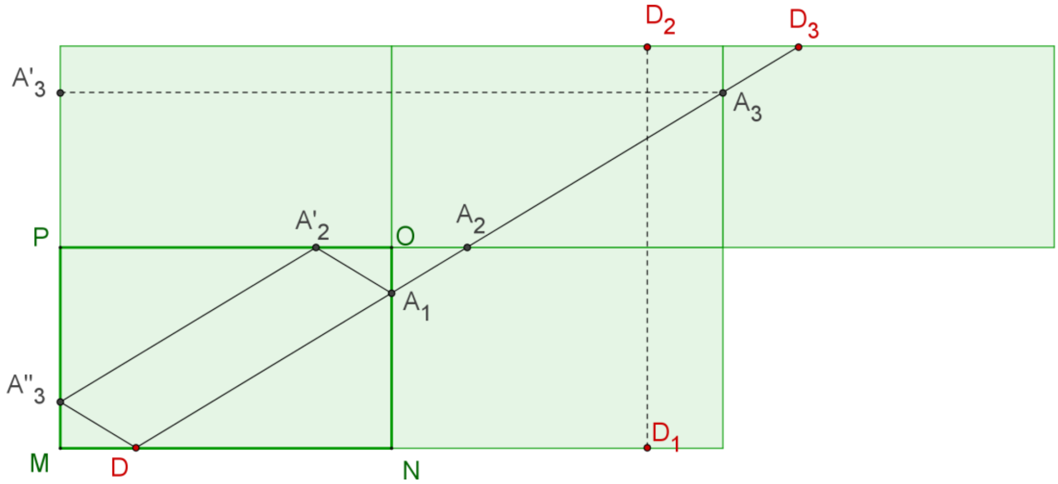
S'il s'agit de savoir si l'on peut atteindre un point quelconque du billard, on cherchera s'il est possible d'atteindre un symétrique quelconque par une trajectoire rectiligne rencontrant la rail par rapport auquel est construit le symétrique.

Où que soit situé le point D le long du rail $[MN]$, il est possible d'atteindre tout point situé sur n'importe où à l'intérieur des trois rectangles figurant les symétriques de la surface de jeu par rapport à chacun des rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande, et ce de trois façons possibles toujours.

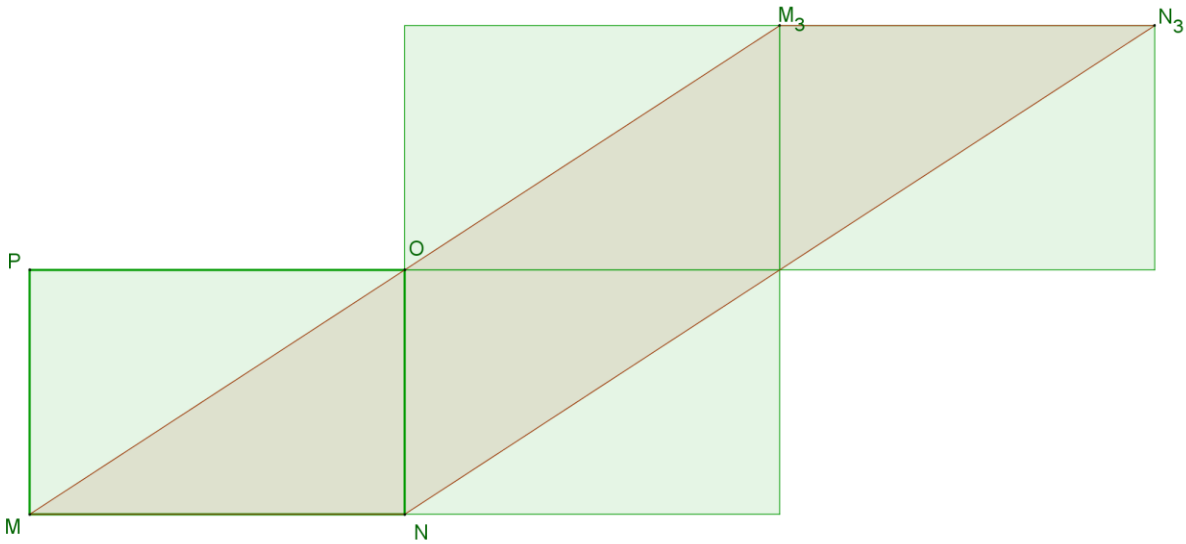
b. On peut répondre en reprenant les résultats du 1.c. (si l'on a cherché toutes les trajectoires possibles – on reprend le résultat selon lequel la trajectoire est nécessairement un parallélogramme ; si l'on a « intuité » qu'il s'agissait au 1.b. d'un losange, ce n'est pas possible). Ci-dessous, un autre méthode.

S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherchera des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.

Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail $[MO]$ en trois bandes avec rebonds en A_1, A'_2 et A''_3 :



La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail $[MN]$, puisque le parallélogramme NN_3MM_3 est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail $[MN]$, le point D_3 construit comme au-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



Olympiades de mathématiques 2013

Corrigé, Académie de Lyon, Classes de première

1 Somme d'entiers consécutifs

Soit N un entier naturel qui s'écrit comme somme de k entiers consécutifs. Leur moyenne (arithmétique) est donc $m = N/k$.

Si k est impair, alors $m = N/k$ est l'un des k entiers consécutifs : celui au milieu. En particulier, k divise N. Réciproquement, si k est n'importe quel diviseur impair de N, alors on peut regrouper k entiers consécutifs autour de $m = N/k$, dont la somme vaut N.

Les diviseurs impairs de 2013 sont 1, 3, 11, 61, 33, 183, 671, 2013. En excluant le cas $k = 1$, c'est-à-dire $2013 = 2013$, cela donne les sept décompositions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\text{diviseur impair: } k = 3 & \Rightarrow\ m = 671 & \Rightarrow & 2013 = 670 + \mathbf{671} + 672, \\
\text{diviseur impair: } k = 11 & \Rightarrow\ m = 183 & \Rightarrow & 2013 = 178 + \cdots + \mathbf{183} + \cdots + 188, \\
\text{diviseur impair: } k = 61 & \Rightarrow\ m = 33 & \Rightarrow & 2013 = 3 + \cdots + \mathbf{33} + \cdots + 63, \\
\text{diviseur impair: } k = 33 & \Rightarrow\ m = 61 & \Rightarrow & 2013 = 45 + \cdots + \mathbf{61} + \cdots + 77, \\
\text{diviseur impair: } k = 183 & \Rightarrow\ m = 11 & \Rightarrow & 2013 = (-80) + \cdots + \mathbf{11} + \cdots + 102, \\
\text{diviseur impair: } k = 671 & \Rightarrow\ m = 3 & \Rightarrow & 2013 = (-332) + \cdots + \mathbf{3} + \cdots + 338, \\
\text{diviseur impair: } k = 2013 & \Rightarrow\ m = 1 & \Rightarrow & 2013 = (-1005) + \cdots + \mathbf{1} + \cdots + 1007.
\end{array}$$

Si k est pair, alors $m = N/k$ se trouve au milieu entre deux des k entiers consécutifs : $m - 1/2$ et $m + 1/2$. Par conséquent, $2m = N/(k/2)$ est la somme de ces deux entiers consécutifs. En particulier, $2m$ est entier et impair, de sorte que N est divisible par $k/2$ et aussi par le nombre impair $2m$. Réciproquement, si l'on prend n'importe quel diviseur impair de N, alors, en l'écrivant sous la forme $2m$, les nombres $m - 1/2$ et $m + 1/2$ sont bien deux entiers consécutifs. On peut donc regrouper, autour de m, k entiers consécutifs dont la somme vaut N, où $k = N/m = 2 \times N/(2m)$ est effectivement pair. Cela donne les huit décompositions suivantes de $N = 2013$:

$$\begin{array}{llll}
\text{div. imp.: } 2m = 2013 & \Rightarrow\ k = 2 & \Rightarrow & 2013 = \mathbf{1006} + \mathbf{1007}, \\
\text{div. imp.: } 2m = 671 & \Rightarrow\ k = 6 & \Rightarrow & 2013 = 333 + 334 + \mathbf{335} + \mathbf{336} + 337 + 338, \\
\text{div. imp.: } 2m = 183 & \Rightarrow\ k = 22 & \Rightarrow & 2013 = 81 + \cdots + \mathbf{91} + \mathbf{92} + \cdots + 102, \\
\text{div. imp.: } 2m = 33 & \Rightarrow\ k = 122 & \Rightarrow & 2013 = (-44) + \cdots + \mathbf{16} + \mathbf{17} + \cdots + 77, \\
\text{div. imp.: } 2m = 61 & \Rightarrow\ k = 66 & \Rightarrow & 2013 = (-2) + \cdots + \mathbf{30} + \mathbf{31} + \cdots + 63, \\
\text{div. imp.: } 2m = 11 & \Rightarrow\ k = 366 & \Rightarrow & 2013 = (-177) + \cdots + \mathbf{5} + \mathbf{6} + \cdots + 188, \\
\text{div. imp.: } 2m = 3 & \Rightarrow\ k = 1342 & \Rightarrow & 2013 = (-669) + \cdots + \mathbf{1} + \mathbf{2} + \cdots + 672, \\
\text{div. imp.: } 2m = 1 & \Rightarrow\ k = 4026 & \Rightarrow & 2013 = (-2012) + \cdots + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \cdots + 2013.
\end{array}$$

En général, soit k est n'importe quel diviseur impair de N (sauf $k = 1$), soit $2m$ est n'importe quel diviseur impair de N (et alors k est pair). Cela démontre que le nombre de décompositions en somme d'entiers consécutifs vaut deux fois le nombre de diviseurs impairs, moins 1 pour exclure le cas $k = 1$. Puisque 2048 n'a qu'un seul diviseur impair, à savoir 1, la seule décomposition est obtenue pour $2m = 1$ et $k = 4096$:

$$2048 = (-2047) + \cdots + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \cdots + 2048.$$

Nous avons déjà déterminé toutes les décompositions de 2013 en somme d'entiers consécutifs. En particulier, $k = 5$ n'est pas possible, car 5 ne divise pas 2013. Et $k = 4$ n'est pas possible non plus, car $k/2 = 2$ ne divise pas 2013.

2 Pousser les bords...

1. *Première solution :* Comme $AB = 3$ et $A'B' = 5$, l'aire augmente de $25 - 9 = 16$.

Seconde solution :

La différence entre l'aire de $A'B'C'D'$ et l'aire de $ABCD$ se décompose en quatre rectangles de taille 3×1 (construits sur AB, BC, CD et DA, respectivement), et quatre carrés de taille 1×1 (dont les diagonales sont AA', BB', CC' et DD', respectivement). L'aire augmente ainsi de $4 \times 3 \times 1 + 4 \times 1 \times 1 = 12 + 4$.

2. La différence entre l'aire de $P'Q'R'$ et l'aire de PQR se décompose en trois rectangles de taille 4×1 (construits sur PQ, QR et RP, respectivement), et trois quadrilatères dont les diagonales sont PP', QQ' et RR', respectivement. Nous pouvons regarder la même décomposition si la longueur de PQ ne vaut pas 4 mais seulement 0, c'est-à-dire si le triangle équilatéral PQR est réduit à un point O. Les trois rectangles disparaissent ainsi, mais les trois quadrilatères sont les mêmes, et forment un nouveau triangle équilatéral $P'Q'R'$, dont le centre O a la distance 1 de chaque côté. Soit M le milieu de $P'Q'$. Le triangle OMP' est rectangle en M avec $\widehat{MOP'} = 60^0$ et $\widehat{MP'O} = 30^0$. Par conséquent, $OM = 1$, $OP' = 2$, $P'M = \sqrt{3}$ et l'aire de OMP' vaut $\sqrt{3} \times 1/2$. Enfin, l'aire du nouveau triangle équilatéral $P'Q'R'$ (avec $P = Q = R = 0$) est six fois plus grande que celle de OMP' et vaut donc $3\sqrt{3}$. Finalement, la différence entre l'aire de notre ancien $P'Q'R'$ et l'aire de notre ancien PQR vaut $3 \times 4 \times 1 + 3\sqrt{3} = 12 + 3\sqrt{3}$.

3. La différence entre les aires se décompose de nouveau en n rectangles construits sur les côtés du polygone intérieur et n quadrilatères. La somme des aires des n rectangles vaut évidemment 12 ; et pour calculer la somme des aires des n quadrilatères, nous pouvons supposer que le polygone intérieur est réduit à un point O, qui a donc la distance 1 de chaque côté du nouveau polygone extérieur. Par conséquent, notre nouveau polygone extérieur contient un cercle de centre O, de rayon 1 et d'aire π. Son aire est donc $> \pi > 3,1$. Finalement, la différence d'aire entre nos anciens polygones est supérieure à $12 + \pi > 12 + 3,1 > 15$.

4. Oui.

Première solution :

Le nouveau polygone extérieur peut se rapprocher d'un cercle aussi bien qu'on veut. Dans ce cas, la différence d'aire entre nos anciens polygones se rapproche aussi bien qu'on veut de $12 + \pi < 15,5$.

Seconde solution :

Prenons un hexagone régulier de périmètre 12 et déplaçons ses côtés vers l'extérieur de 1. Comme d'habitude, la différence entre les aires se décompose en six rectangles construits sur les côtés de l'hexagone et six quadrilatères. La somme des aires des six rectangles vaut 12 ; et pour calculer la somme des aires des six quadrilatères, nous pouvons supposer que l'hexagone intérieur est réduit à un point O qui a la distance 1 de chaque côté du nouvel hexagone extérieur. Son aire vaut donc 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur 1, c'est-à-dire $6 \times \sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$. Finalement, la différence d'aire entre nos anciens hexagones réguliers vaut $12 + 2\sqrt{3} < 15,5$.