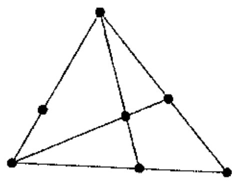
**Olympiades de mathématiques 2014**

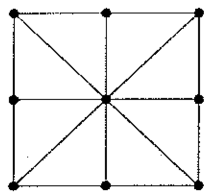
**EUROPE – AFRIQUE – ASIE**

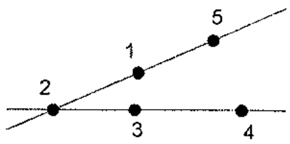
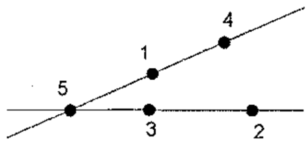
**EXERCICE 1 : FIGURES EQUILIBRÉES**

**Éléments de correction**

1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.





| | |
|---|---|
| 2. Exemple de numérotation non magique :<br><br> | Exemple de numérotation magique de constante 10 :<br><br> |

On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3.

a) Les quatre segments portent respectivement les sommes $a + c + e$, $a + b + f$, $b + d + e$, $c + d + f$. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à $4K$, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f) = 2\times(1+2+3+4+5+6) = 42$. D'où l'égalité $4K = 42$.

b) L'égalité est impossible puisque $K$ est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.

4.

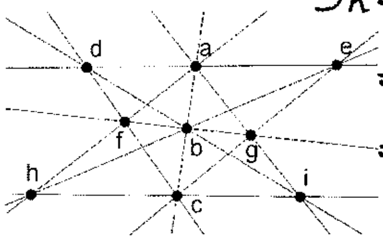
a) La somme $a + c + e$ est minimale lorsque $\{a, c, e\} = \{1, 2, 3\}$, et cette somme est maximale lorsque $\{a, c, e\} = \{4, 5, 6\}$. D'où $6 \leq a+c+e \leq 15$.

b) Si le graphe est magique, de constante $K$, on obtient :
$a + b + c = K$ ; $c + d + e = K$ ; $a + f + e = K$, d'où, en sommant membre à membre,
$(a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) = 3K$.
Comme $a + b + c + d + e + f = 21$, on en déduite que $(a + c + e) = 3(K - 7)$.

c) On déduit de a) et b) que $6 \leq 3(K-7) \leq 15$, d'où $9 \leq K \leq 12$.
On vérifie que les quatre valeurs possibles de $K$ donnent effectivement un graphe équilibré magique :

- avec $K=9$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec $K=10$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec $K=11$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
- avec $K=12$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.

5. On numérote la figure ainsi :




$3K = (d+a+e)+(f+b+g)+(h+c+i)$
$= 1+2+3+4+5+6+7+8+9$
$= 45$

Ces trois sommets $a$, $b$, $c$ sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.
On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à $K$) : $4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i)=10K$.
On a donc $10K = 3 \times 45 + a + b + c = 135 + a + b + c$
Comme $1 + 2 + 3 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9$, cad $6 \leq a + b + c \leq 24$, on trouve que la seule possibilité pour $K$ est $K = 15$ (et $a + b + c = 15$).

Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments.
Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : $6 = 1 + 5 = 2 + 4$..

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.

**Olympiades de mathématiques 2014**

**EUROPE – AFRIQUE – ASIE**

**EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE**

**Éléments de correction**

**Partie A** :

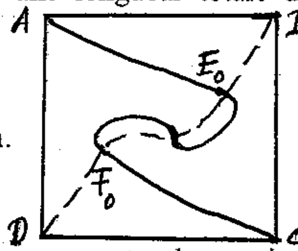
1. C'est **l'assistant n°3**. En effet :

La longueur du réseau routier de l'assistant n°1 mesure 300 km.

Celle de l'assistant n°2 mesure $200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ km (la diagonale d'un carré de côté $a$ mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).

Celle de l'assistant n°3 mesure $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi \approx 280{,}7$ km

ABE est rectangle en B donc $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 12\,500$ donc $AE = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$. Puisque FE est le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] d'où $AF = AE - FE = 50\sqrt{5} - 50$. D'autre part, le demi-cercle mesure $\frac{2\pi\times 50}{2} = 50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi$.




2. Oui, car il fait $20 + 4 \times \sqrt{50^2 + 40^2} = 20 + 40\sqrt{41} \approx 276{,}1$ km.

**Partie B** :

1. Comme admis au début de l'énoncé : si on trace une courbe quelconque entre deux points sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.

Donc ici, le premier réseau dessiné par l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre $E_0$ et $F_0$ par un seul segment. Attention : sur le chemin BD, $E_0$ peut être plus proche de B que $F_0$. Cela donne l'autre solution minimale.

2. a. Notons $A'$ le symétrique de A par rapport à $\Delta_E$. La symétrie conserve les longueurs, on a : $DE_0 + E_0A = DE_0 + E_0A'$. D'après l'inégalité triangulaire rappelée au 1, cette somme est toujours supérieure ou égale à $DA'$. Et il y a égalité si, et seulement si, $E_0$ appartient au segment [DA']. Ainsi, $DE_0 + E_0A$ sera minimale lorsque $E_0$ sera sur le segment [DA'] c'est-à-dire lorsque $E_0$ est sur la médiatrice de [DA], qu'on appellera médiatrice horizontale du carré.

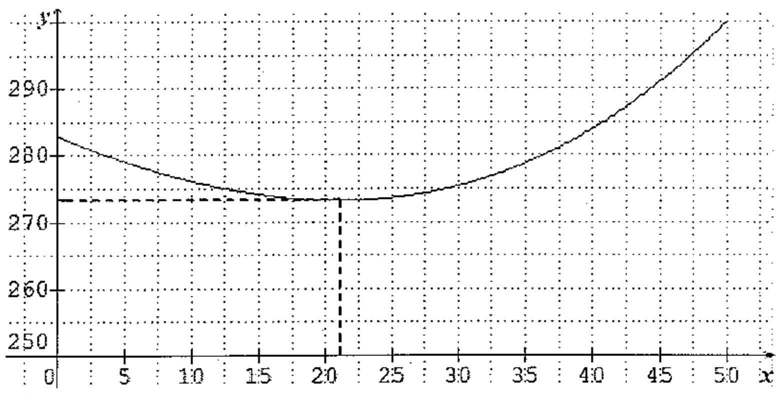
b. La distance minimale entre un point de $\Delta_E$ et un point de $\Delta_F$ est obtenue lorsque (EF) est perpendiculaire à $\Delta_E$ (et donc aussi à $\Delta_F$). En effet, dans le cas contraire, notons G l'intersection de $\Delta_E$ et de la perpendiculaire à $\Delta_E$ passant par F. Le triangle EFG est alors rectangle en G donc son hypoténuse EF est supérieure à GF (théorème de Pythagore) ce qui ne donnerait pas une longueur minimale.

c. Les droites $\Delta_E$ et $\Delta_F$ étant fixées, pour tout réseau où $E_0$ est sur $\Delta_E$ et $F_0$ sur $\Delta_F$, la longueur totale est $L + L' + L''$ où $L = DE_0 + E_0A$ ; $L'$ est la distance entre les deux droites et $L'' = CF_0 + F_0B$.
Or d'après a, et b, il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes, celui passant par E et F.
Conclusion (en considérant toutes les droites $\Delta_E$ et $\Delta_F$ possibles) : un réseau minimisant est bien de la forme de la figure.

3. a. On note O le point d'intersection de [EF] avec la médiatrice verticale (la médiatrice de [AB]).
Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs DE+EA+EO d'un côté et CF+FB+FO
de l'autre. Si par exemple CF+FB+FO est plus grand ou égal à DE+EA+EO on remplace F par E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

b. Si on note $2x = EF$ où $x \in [0; 50]$ alors le réseau mesure

$f(x) =$
$2x + 4\sqrt{(50 - x)^2 + 50^2}$.




Solution approchée : on représente cette fonction à l'aide de la calculatrice graphique et on essaie de chercher une valeur approchée du minimum :
On obtient un minimum d'environ 275 km atteinte en $x \approx 21$ d'où $EF \approx 42$ km.
Solution exacte (*utilisant des notions hors programme*):
Pour cela, on admet la propriété ci-dessous :
si $u$ est fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
Ici, $f$ est dérivable sur [0; 50] et pour tout $x$ de cet intervalle $f'(x) = 2 + \frac{4(x-50)}{\sqrt{(50-x)^2+50^2}}$.
Or $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 100x + 5\,000} \geq 2(50 - x) \Leftrightarrow x^2 - 100x + 5\,000 \geq 4x^2 - 400x + 10\,000 \Leftrightarrow 3x^2 - 300x + 5\,000 \leq 0$
$\Delta = 30\,000$ les racines sont $x_1 = 50\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 50$ et $x_2 = 50\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 21{,}132$.

| $x$ | $0$ | | $x_2$ | | $50$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $f(x_2)$ | $\searrow$ | |
| | $200\sqrt{2}$ | | | | $300$ |

Pour $EF = x_2 = 100\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 42{,}264$ km, ce réseau est donc le plus petit, il mesure $f(x_2) = \cdots = 100\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 273{,}205$ km.

c. On peut d'abord chercher EAD :

$\tan(\mathrm{EAD}) = \frac{\frac{1}{2}(100 - EF_{min})}{50} \approx 0{,}577$ d'où EAD ≈ 30° et AED ≈ 120°.

*Remarque : la valeur exacte de tan(EAD) =* $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *: on a donc EAD = 30° et AED = 120°*

<u>Solution physique qui répond aux deux questions :</u> le réseau passe par A, D, O (le centre). On peut imaginer que les points sont placés sur une plaque percée en A, D, O et que l'on attache 3 fils en E. On fait passer les fils par les 3 trous et aux extrémités desquels on suspend des masses identiques. Le système prend une position d'équilibre. L'énergie potentielle doit être minimale, c'est-à-dire que la longueur des fils sous la plaque doit être la plus grande (la masse totale est la proche que la Terre !). Donc la longueur des fils au-dessus de la plaque est minimale. C'est donc la solution de notre problème. On fait le bilan des forces au point M. La somme des tensions (qui sont identiques en intensité) est nulle. Donc on a la somme de 3 vecteurs de même longueur qui est nulle. Cela n'est possible que si les angles valent 120°. En effet si l'un des trois angles est inférieur à 120°, la longueur du troisième vecteur qui est l'opposé de la somme (à l'intensité près) serait inférieure à 2 cos(60°) = 1.

# Éléments de correction

## Nombres premiers permutables

1. $51 = 3 \times 17$ donc 51 n'est pas premier.
   Pour déterminer si un entier $n$ est premier on peut appliquer l'un des critères suivants :
   <u>*Critère 1 :*</u> *Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\frac{n}{2}$.*
   <u>*Critère 2 :*</u> *Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{n}$.*
   <u>*Critère 3 :*</u> *Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$.*

   Programmation du critère 2 pour une calculatrice TI 82

```
Prompt N
1 → T
2 → I
int(√N)→B
while I≤B and T=1
N/I → Q
If Q=int(Q)
Then
0 → T
End
I+1 → I
End
If T=1
Then
Disp "PREMIER"
Else
DISP "PAS PREMIER"
End
```

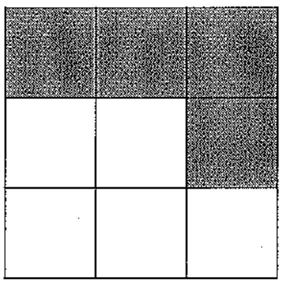
   La liste des entiers premiers dans l'ordre commence par : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots$
   67 est un entier premier car il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{67} \approx 8,2$.
   779 n'est pas premier car il est divisible par 19 puisque $779 = 19 \times 41$.
2. 13 est un entier premier, de même que 31 donc 13 est un entier premier permutable.
3. 137 est un entier premier mais $371 = 7 \times 53$ donc 137 n'est pas un entier premier permutable.
4. Supposons que $N > 2$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit pair. En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait ce chiffre pair et $N$ ne serait plus un nombre premier. En conclusion si $N > 2$ est un nombre premier permutable tous ses chiffres sont impairs.
5. Supposons que $N > 5$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit égal à 5 . En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait 5 et $N$ ne serait plus un nombre premier. En conclusion les chiffres d'un entier $N > 5$, premier permutable, sont 1, 3, 7 ou 9.
   Soit $N$ un nombre premier permutable à trois chiffres. On pose $N = \overline{abc}$ avec $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant 9$.

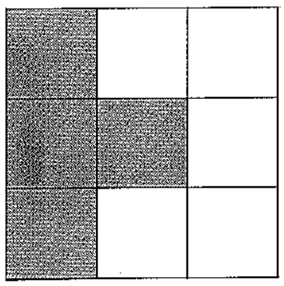
- Si $a = b = c$, $N = a \times 111$ et $N$ n'est pas premier.
- Si $a = b$ et $b < c$ , les valeurs possibles de $N$ sont $113, 117, 119, 337, 339, 779$. Or 779 n'est pas premier d'après le 1. et 339 n'est pas premier car $339 = 3 \times 113$. Par contre $337, 373$ et 733 sont des nombres premiers donc 337 est un nombre premier permutable.
- Si $a < b$ et $b = c$, les valeurs possibles de $N$ sont $133, 177, 199, 377, 399, 799$.
  $377 = 13 \times 29$, $399 = 3 \times 133$ et $799 = 17 \times 47$ donc $377, 399$ et 799 ne sont pas des nombres premiers.
- Si $a < b < c$, $a$, les valeurs possibles de $N$ sont $137, 139, 179, 379$ . Or 793 n'est pas premier car $793 = 13 \times 61$ donc 379 n'est pas premier permutable.

En conclusion le plus grand élément de $E$ est 337.

6. L'ensemble F ne contient pas de nombres à cinq chiffres et plus car les chiffres, qui ne peuvent être que $1, 3, 7$ et 9, sont écrits dans un ordre strictement croissant.
   L'ensemble F ne contient pas de nombres à quatre chiffres. En effet le seul élément de F à quatre chiffres serait 1379. Or 1379 n'est pas premier car $1379 = 7 \times 197$.
   L'ensemble F ne contient pas de nombre à trois chiffres. Les seuls éléments de F à trois chiffres seraient $137, 139, 179, 379$. Or 137 n'est pas premier permutable d'après le 3. et $319, 791, 793$ ne sont pas premiers car $319 = 11 \times 29$, $791 = 7 \times 113$ et $793 = 13 \times 61$. Ainsi $139, 179, 379$ ne sont pas premiers permutables non plus.
   79 et 97 sont des nombres premiers : le plus grand élément de F est 79.

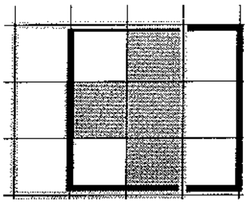
## Colorier la grille





1.

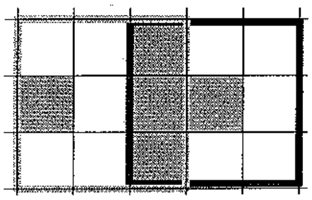
2. Dans une grille $3 \times 3$ il n'y a qu'une case intérieure, la case centrale. Si elle est blanche il faut 4 voisines noires que l'on peut choisir parmi les huit cases du bord. Si elle est noire, cinq de ses voisines sont blanches et il reste 3 cases à colorier en noir. Dans les deux cas, il y a quatre cases noires.
   De façon générale, il faut et il suffit que chaque sous-grille $3 \times 3$ contienne exactement quatre cases noires. Pour cela, on peut utiliser des colorations doublement périodiques vérifiant :
   la case (a,b) est noire $\Longleftrightarrow$ la case (a+3,b) est noire $\Longleftrightarrow$ la case (a,b+3) est noire.
   Pour de telles colorations, il suffit de vérifier qu'elles sont correctes pour une seule sous-grille de taille $3 \times 3$, qui doit donc contenir exactement quatre cases noires.
3. (a) Une grille $3 \times 4$ contient une grille $3 \times 3$ et donc au moins quatre cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $3 \times 4$ qui ne contient que quatre cases noires :



Les cases noires intérieures ont bien exactement 5 voisines blanches.

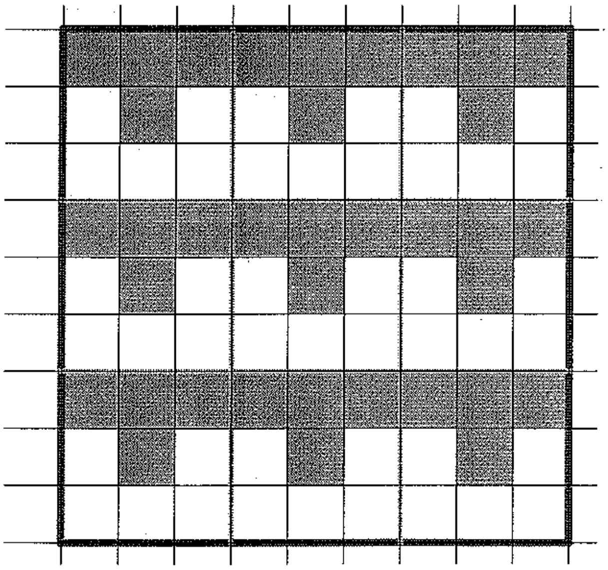
L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans une grille $3 \times 4$, on peut construire deux grilles $3 \times 3$ dont l'intersection est une grille $3 \times 2$. Si on cherche à obtenir le minimum de cases noires il faut que cette intersection en comprenne le plus possible. Essayons avec 4 cases noires. Comme dans chaque grille $3 \times 3$ il y a exactement 4 cases noires coloriées, chacune des grilles $3 \times 3$ serait complète. Il y aurait au total 4 cases coloriées. Si une telle configuration existe, elle est minimale. On vérifie alors qu'il existe une solution comme celle ci-dessus.

(b) Une grille $3 \times 5$ contient une première grille $3 \times 3$ contenant quatre cases noires et une seconde grille $3 \times 3$ qui n'a que trois cases en commun avec la première. Cette seconde grille $3 \times 3$ contient donc au moins une case noire supplémentaire. Au total, il y a donc au moins cinq cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $3 \times 5$ qui ne contient que cinq cases noires :

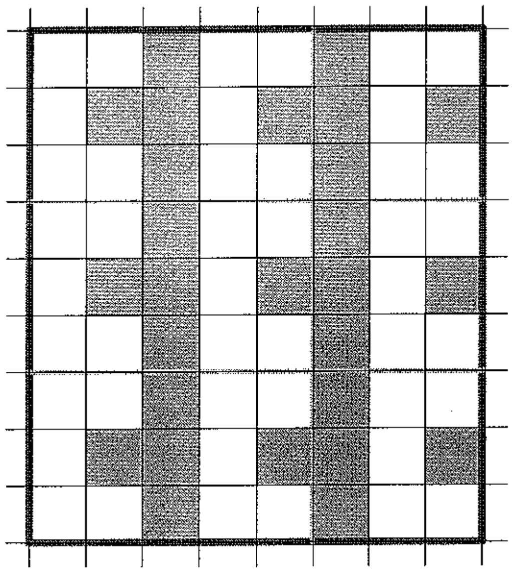


L'idée pour trouver cette solution est la suivante : la plus petite intersection de deux grilles $3 \times 3$ que l'on peut inclure dans une grille $3 \times 5$ est une grille $3 \times 1$ que l'on peut colorier entièrement. Il reste alors une case noire à colorier dans chacune des grilles $3 \times 3$. Il suffit alors de dessiner une telle grille comme celle ci-dessus pour prouver que cette solution est minimale.

(c) Pour une grille $9 \times 9$ il existe exactement 9 grilles $3 \times 3$ dont l'intersection est vide. Dans chacune de ces grilles $3 \times 3$ on colorie exactement 4 cases. Exhiber une solution suffit alors pour montrer que 36 cases noires est la solution minimale (et maximale aussi !)



(d) Une grille $8 \times 9$ est l'union disjointe de trois grilles $3 \times 3$ et de trois grilles $3 \times 5$. D'après 3.b) elle contient donc au moins $3 \times 4 + 3 \times 5 = 27$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $8 \times 9$ qui ne contient que 27 cases noires :

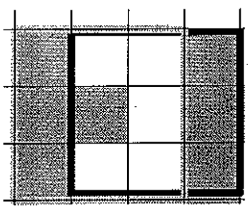


Une solution minimale pour la grille $8 \times 9$

4. Pour déterminer le nombre maximal de cases noires, on procédera de la même manière mais en cherchant à minimiser le nombre de cases noires dans l'intersection, en essayant, par exemple de n'en placer aucune.

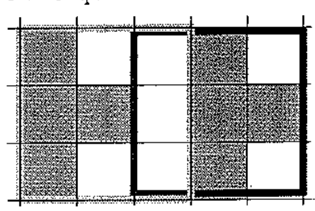
(a) Une grille $3 \times 4$ contient une grille $3 \times 3$ (dont quatre cases sont noires) et trois cases supplémentaires qui, à priori, pourraient également être noires.

Il y a donc au plus sept cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $3 \times 4$ qui contient bien sept cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : pour une grille $3 \times 4$, l'intersection est une grille $3 \times 2$, par conséquent il reste 3 cases disponibles dans chaque grille $3 \times 3$. On essaie avec une case noire dans l'intersection et on obtient la solution maximale de 7 cases noires.

(b) On peut couvrir une grille $3 \times 5$ à l'aide de deux grilles $3 \times 3$. Il y a donc au plus deux fois quatre cases noires, c'est-à-dire huit cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $3 \times 5$ qui contient bien huit cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans un grille $3 \times 5$ il est possible de vider de cases noires l'intersection des deux grilles $3 \times 3$ ; on obtient alors 8 cases noires au maximum.

(c) Comme on l'a vu dans la question précédente, pour une grille $9 \times 9$ le minimum et le maximum se confondent à 36 cases noires.

(d) Une grille $8 \times 9$ est l'union disjointe de trois grilles $3 \times 3$ et de trois grilles $3 \times 5$. D'après 4.b) elle contient donc au plus $3 \times 4 + 3 \times 8 = 36$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille $8 \times 9$ qui contient bien 36 cases noires :