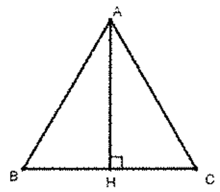
Olympiades académiques de mathématiques. Classes de première.

Éléments de solution

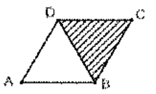
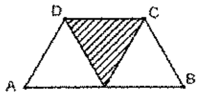
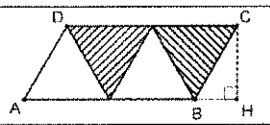
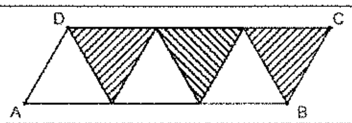
Exercice numéro 1 (national) Défi entre sœurs

Partie A



1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AC^2 - CH^2$. AC = 1 et CH = $\frac{1}{2}$. Donc AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcul des longueurs des diagonales

			
Deux triangles	*Trois triangles*	*Quatre triangles*	*Six triangles*
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ $AC^2 = 6{,}25 + 0{,}75$. D'où AC = $\sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). $AC^2 = 12{,}25 + 0{,}75$, d'où AB = $\sqrt{13}$

Partie B

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, on pose $n = 2p$, la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p + \frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.

2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L.

3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question **1.** de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $l = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p+1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair.
En revanche, $7^2 + 7 + 1 = 57$, multiple de 3…

2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.

3. La question est : existe-t-il un entier naturel p solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2\,015$? Cette équation s'écrit $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\,014{,}25$ et 2 014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

4. 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 1\,015\,056{,}25$ a donc deux solutions, 1 007 et – 1 008. Une seule répond au problème. La grande diagonale d'une figure de 2 014 triangles ou la petite d'une figure de 2 016 triangles conviennent ou les deux pour 2015.

5. Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième. Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2 + 3p + 3} - \sqrt{p^2 + p + 1}$

p	$L(p+1)$	$L(p)$	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Ou encore : $L(p+1) - L(p) = \frac{\left(\sqrt{p^2+3p+3}\right)^2 - \left(\sqrt{p^2+p+1}\right)^2}{\sqrt{p^2+3p+3} + \sqrt{p^2+p+1}}$

Et enfin : $L(p+1) - L(p) = \frac{2 + \frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}}\right)}$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de p (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

Exercice numéro 2 (national) On est les rois !

Partie A

1. Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

2. L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle [0, 1], l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis lui aussi « étiré ».

Partie B

1. Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0, 33	0, 66	0, 68	0, 64	0, 72	0, 56	0, 88	0, 24	0, 48	0, 96	0, 08	0, 16

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0, 33 ne se stabilisent pas (le 0, 16 prédit cependant le retour de 0, 64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0, 6666666 confirment cette dispersion, plus lente.

0,66666666
0,66666668
0,66666664
0,66666672
0,66666656
0,66666688
0,66666624
0,66666752
0,66666496
0,66667008
0,66665984
0,66668032
0,66663936
0,66672128
0,66655744
0,66688512
0,66622976
0,66754048
0,66491904
0,67016192
0,65967616
0,68064768
0,63870464
0,72259072
0,55481856
0,89036288
0,21927424
0,43854848
0,87709695
...

2. - La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle [0, 1] en quatre. L'équation $f\big(f(x)\big) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparus.

- La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente…)

Intervalle	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$
Écriture de $f\big(f(x)\big)$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$
Intervalle contenant $f\big(f(x)\big)$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$
Écriture de $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$
Égalité à traiter	$7x=0$	$9x=2$	$7x=2$	$9x=4$	$7x=4$	$9x=6$	$7x=6$	$9x=8$
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux *cycles* : $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ d'autre part.

3. Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle [0, 1] dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$). Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2\,015}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2\,015}{2\,048}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1\,024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n, et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n} = 2x$ ou $\frac{p}{2^n} = 2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance… et 0.

Partie C

1. On introduit une variable entière N, de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction N ← N+1 (Ou toute autre forme d'incrémentation) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N. Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre 1/9 est à l'origine du cycle 2/9, 4/9, 8/9. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre 1/9 subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de 1/9, qui devraient être écrites 0,222222222 ; 0,444444444 et 0,888888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?

0,444444656
0,888889313
0,222221375
0,444442749
0,888885498
0,222229004
0,444458008
0,888916016
0,222167969
0,444335938
0,888671875
0,22265625
0,4453125
0,890625
0,21875
0,4375
0,875

Éléments de correction

1 Nombres automorphes

1. $0001^2 = 0001$ et $0625^2 = 39\mathbf{0625}$ donc 0001 et 0625 sont des nombres automorphes à 4 chiffres.
2. On a $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $5^2 = \mathbf{25}$ et $6^2 = \mathbf{36}$.
   Donc les quatre nombres automorphes à un chiffre sont $\boxed{0,\ 1,\ 5 \text{ et } 6}$.
   On peut remarquer que :

   a est un nombre automorphe à un chiffre ssi 10 divise $a^2 - a$.

   a est un nombre automorphe à un chiffre ssi 10 divise $a(a-1)$.

   $$a \text{ est un nombre automorphe à un chiffre ssi } \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ \text{ou} \\ 5 \text{ divise } a \text{ et } 2 \text{ divise } a-1 \\ \text{ou} \\ 2 \text{ divise } a \text{ et } 5 \text{ divise } a-1 \end{cases}$$

   $$a \text{ est un nombre automorphe à un chiffre ssi } \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ \text{ou} \\ a = 5 \\ \text{ou} \\ a = 6 \end{cases}$$

3. On a $00^2 = \mathbf{00}$, $01^2 = \mathbf{01}$, $25^2 = 6\mathbf{25}$ et $76^2 = 57\mathbf{76}$.
   Donc les quatre nombres automorphes à deux chiffres sont $\boxed{00,\ 01,\ 25 \text{ et } 76}$.
4. Soit b un nombre automorphe à 2 chiffres et soit a un entier compris entre 0 et 9 tel que $10^2a + b$ soit un nombre automorphe à 3 chiffres.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10^3 divise $(10^2a + b)^2 - (10^2a + b)$.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10^3 divise $10^4a^2 + 2ab \times 10^2 + b^2 - 10^2a - b$.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10^3 divise $(2ab - a) \times 10^2 + b^2 - b$.

   Or b est automorphe à 2 chiffres donc $b^2 = 10^2c + b$, donc on peut écrire :

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10^3 divise $(2ab - a) \times 10^2 + 10^2c$.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10^3 divise $10^2(2ab - a + c)$.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $2ab - a + c$.

   Or $b = 10q + u$ où u est le chiffre des unités de b, donc on peut écrire

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $20aq + 2au - a + c$, où c est le chiffre des centaines de b^2 et u le chiffre des unités de b.

   $10^2a + b$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $a(2u-1) + c$, où c est le chiffre des centaines de b^2 et u le chiffre des unités de b.

   A partir de cette dernière équivalence, on raisonne par disjonction des cas :

   Premier Cas : $b = 00$ donc $u = 0$ et $b^2 = 000$ donc $c = 0$

   $10^2a + 00$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $-a$.

   Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc :

   $10^2a + 00$ automorphe à 3 chiffres ssi $a = 0$.

   $\boxed{\text{Un premier nombre automorphe à trois chiffres est donc 000.}}$

Deuxième Cas : $b = 01$ donc $u = 1$ et $b^2 = 001$ donc $c = 0$

$10^2a + 01$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise a.

Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc :

$10^2a + 01$ **automorphe à 3 chiffres ssi** $a = 0$.

$\boxed{\text{Un second nombre automorphe à trois chiffres est donc 001.}}$

Troisième Cas : $b = 25$ donc $u = 5$ et $b^2 = 625$ donc $c = 6$

$10^2a + 25$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $9a + 6 = (10 - 1)a + 10 - 4$.

$10^2a + 25$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $-a - 4$.

$10^2a + 25$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $a + 4$.

Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc $4 \leqslant a + 4 \leqslant 13$:

$10^2a + 25$ automorphe à 3 chiffres ssi $a + 4 = 10$.

$10^2a + 25$ **automorphe à 3 chiffres ssi** $a = 6$.

$\boxed{\text{Un troisième nombre automorphe à trois chiffres est donc 625.}}$

On peut remarquer que $a = c$ et que déjà pour le nombre automorphe à 2 chiffres se terminant par 5, on obtenait le second chiffre en prenant le chiffre des dizaines du carré de 5 nombre automorphe à 1 chiffre.

Quatrième Cas : $b = 76$ donc $u = 6$ et $b^2 = 5776$ donc $c = 7$

$10^2a + 76$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $11a + 7 = (10 + 1)a + 10 - 3$.

$10^2a + 76$ automorphe à 3 chiffres ssi 10 divise $a - 3$.

Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc $-3 \leqslant a - 3 \leqslant 6$:

$10^2a + 76$ automorphe à 3 chiffres ssi $a - 3 = 0$.

$10^2a + 76$ **automorphe à 3 chiffres ssi** $a = 3$.

$\boxed{\text{Un troisième nombre automorphe à trois chiffres est donc 376.}}$

On peut remarquer que $a = 10 - c$ et que déjà pour le nombre automorphe à 2 chiffres se terminant par 6, on obtenait le second chiffre en prenant le complémentaire à 10 du chiffre des dizaines du carré de 6 nombre automorphe à 1 chiffre.

$\boxed{\text{000, 001, 625 et 376}}$ sont donc quatre nombre automorphes à 3 chiffres.

De plus si $10^2a + b$ est un nombre automorphe à 3 chiffres, on peut remarquer que $\left(10^2a + b\right)^2 = a^2 \times 10^4 + 2ab \times 10^2 + b^2$, donc les deux derniers chiffres de $\left(10^2a + b\right)^2$ sont les deux derniers chiffres de b^2. Comme les deux derniers chiffres de $10^2a + b$ sont ceux de b, b et b^2 doivent avoir les deux mêmes derniers chiffres et b doit être nécessairement un nombre automorphe à 2 chiffres.

Par conséquent, on a bien trouvé les quatre seuls nombres automorphes à 3 chiffres qui sont de la forme $10^2a + b$ avec b nombre automorphe à 2 chiffres.

Une fois calculé les nombre automorphes à 2 chiffres, on a calculé a à partir de la condition nécessaire et suffisante 10 *divise $a(2u - 1) + c$, où c est le chiffre des centaines de b^2 et u le chiffre des unités de b.* On procédera de la même façon pour calculer les nombres automorphes à 4, 5 … 10 chiffres …

5. Les quatre nombre automorphes à 10 chiffres sont :
   $\boxed{\text{0000000000, 0000000001, 8212890625, 1787109376}}$
   Pour obtenir les quatre nombres automorphes à 10 chiffres, on répété le procédé qui nous a permis d'obtenir les nombres automorphes à 3 chiffres à partir des nombres automorphes à 2 chiffres.

On peut d'abord se convaincre que si $10^n a + b$ est un nombre automorphe à $n+1$ chiffres alors b est un nombre automorphe à n chiffres.

Pour le prouver, on procède comme pour $n = 2$: $(10^n a + b)^2 = 10^{2n} a^2 + 2ab \times 10^n + b^2$, donc les n derniers chiffres de $(10^n a + b)^2$ sont les n derniers chiffres de b^2. Or les n derniers chiffres de $10^n a + b$ sont les n derniers chiffres de b. Donc b^2 et b doivent avoir les mêmes n derniers chiffres, donc b doit être un nombre automorphe à n chiffres.

Ainsi il est raisonnable de construire les nombres automorphes à $n+1$ chiffres à partir des nombres automorphes à n chiffres.

On a déjà prouvé qu'il y avait quatre nombres automorphes à 1, 2, 3 ou 4 chiffres donc il y aura au plus quatre nombres automorphes à dix chiffres.

Pour les déterminer on applique l'heuristique suivante découverte dans la construction des nombres automorphes à 2 ou 3 chiffres :

- On part des quatre nombres automorphes à un chiffre qui sont 0, 1, 5 et 6 ;
- On procède de façon itérative pour construire les quatre nombre automorphes à $n+1$ chiffres (avec n entier naturel) à partir des quatre nombres automorphes à n chiffres :
  - Il y a toujours deux solutions simples : $\overbrace{0\ldots0}^{n\text{ zéros}}0$ et $\overbrace{0\ldots0}^{n\text{ zéros}}1$;
  - Il y a une solution à $n+1$ chiffres se terminant par un 6 qui s'obtient à partir de la solution à n chiffres se terminant par un 6 en lui ajoutant à gauche le complémentaire à 10 (ou zéro si c'est zéro) du $n+1^{\text{ème}}$ chiffre de son carré ;
  - Il y a une solution à $n+1$ chiffres se terminant par un 5 qui s'obtient à partir de la solution à n chiffres se terminant par un 5 en lui ajoutant à gauche le $n+1^{\text{ème}}$ chiffre de son carré ;

On donne ci-dessous une implémentation de cette heuristique sous la forme d'une fonction écrite dans le langage Python. Pour l'instant on n'a pas démontré qu'à tout rang n on pouvait ainsi construire quatre nouveaux nombres automorphes et que les opérations décrites étaient mathématiquement possibles. Certaines conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir de nouveaux chiffres de nombres automorphes, pourraient en effet aboutir à des équations sans solutions.

A ce stade, on peut quand même se risquer à écrire un petit programme et d'ailleurs le programme retourne quatre nombres dont on peut vérifier qu'ils sont automorphes à 10 chiffres et comme on a prouvé plus haut qu'il ne pouvait pas y avoir plus de quatre nombres automorphes à 10 chiffres, on a trouvé tous les nombres automorphes à 10 chiffres en procédant de façon expérimentale ...

```
def automorphe(n):
    """Retourne les quatre entiers automorphes à n chiffres
    Le chiffre c(n-1) de rang n est tel que :
    2*c(n-1)*c(0) - c(n-1) + Chiffre de rang n-1 du carré des n-1 premiers
    chiffres est divisible par 10.
    Comme il y a quatre possibilités pour c(0) : 0, 1, 5, 6
    on peut prouver que cette équation a toujours une unique solution
    et que c'est le Chiffre de rang n-1 du carré des n-1 premiers
    chiffres pour c(0)=0 ou c(0)=5 ou son complément à 10 pour c(0)=6
    ou c(0)=1
    """
    if n <= 0:
        return None
    tab = ['0', '1', '5', '6']
    for k in range(2, n+1):
```

```
        for i in range(len(tab)):
            oldnombre = int(tab[i])
            newchiffre = ((-1)**i*(oldnombre**2//10**(k-1)))%10
            tab[i] = str(newchiffre) + tab[i]
    return tab
```

automorphe.py

Et voici quelques exemples d'exécutions de cette fonction qui permettent de trouver les nombres automorphes à 1, 2, 5 ou 10 chiffres :

```
>>> automorphe(1)
['0', '1', '5', '6']
>>> automorphe(2)
['00', '01', '25', '76']
>>> automorphe(5)
['00000', '00001', '90625', '09376']
>>> automorphe(10)
['0000000000', '0000000001', '8212890625', '1787109376']
```

exemples de sorties

6. Un nombre à $n+1$ chiffres s'écrit de façon unique sous la forme $x = a \times 10^n + y$ où a est un chiffre entre 0 et 9 et y est un nombre à n chiffres.
D'après une identité remarquable, nous avons $x^2 = a^2 \times 10^{2n} + 2ay \times 10^n + y^2$.

   x est automorphe si et seulement si les $n+1$ derniers chiffres de x et de x^2 sont les mêmes. Comme les termes divisibles par 10^n n'ont aucune influence sur les n derniers chiffres, cela implique que les n derniers chiffres de y et de y^2 sont les mêmes, c'est-à-dire que y est automorphe à n chiffres. En particulier, le dernier chiffre de y est un nombre automorphe à 1 chiffre, soit 0, 1, 5 ou 6.

   Réciproquement, nous allons démontrer que pour chaque nombre automorphe y à n chiffres, il existe un chiffre a entre 0 et 9 unique tel que $x = a \times 10^n + y$ est un nombre automorphe à $n+1$ chiffres. Chacun des 4 nombres automorphes à 1 chiffre se prolongera alors de façon unique jusqu'à un nombre automorphe de n, puis $n+1$ chiffres. Ceci prouvera que pour tout n, il y a exactement quatre nombres automorphes à n chiffres.

   Soit donc y un nombre automorphe à n chiffres.
Comme le terme divisible par 10^{2n} n'a aucune influence sur les $n+1$ derniers chiffres, x est automorphe si et seulement si les $n+1$ derniers chiffres de x sont les mêmes que ceux de $2ay \times 10^n + y^2$.
Autrement dit, il faut et il suffit que 10^{n+1} divise $(2ay \times 10^n + y^2) - (a \times 10^n + y) = y^2 - y + (2y-1)a \times 10^n$.
Comme y est automorphe, $y^2 - y$ est divisible par 10^n.
Notre condition nécessaire et suffisante est donc que $\frac{y^2-y}{10^n} + (2y-1)a$ est divisible par 10.
Si le dernier chiffre de y est 0 ou 5, alors $2y$ est divisible par 10.
x est alors automorphe si et seulement si $\frac{y^2-y}{10^n} - a$ est divisible par 10, c'est-à-dire si et seulement si a est le dernier chiffre de $\frac{y^2-y}{10^n}$.
Si le dernier chiffre de y est 1 ou 6, alors $2y-2$ est divisible par 10. x est alors automorphe si et seulement si $\frac{y^2-y}{10^n} + a$ est divisible par 10, et de nouveau, le dernier chiffre de $\frac{y^2-y}{10^n}$ détermine a de façon unique comme son complémentaire à 10.
Cela termine la preuve.

2 Le carreleur

Partie 1

Le carreleur fait des essais de couleurs sur un échantillon de quatre carreaux.

Premier essai

Dans cet essai, le carreleur s'impose un carreau noir en A_1 et un carreau gris en B_1.

1. S'il ne possède que 2 couleurs de carreaux, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $2 \times 1 = 2$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure une disposition.
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le carreleur peut donc réaliser } 2 - 1 = 1 \text{ échantillon}}$.

2. S'il possède une troisième couleur, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $3 \times 2 = 6$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure les 1×2 dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première **ou** de la seconde ligne sont de la même couleur.
   — il y a $1 \times 2 = 2$ dispositions pour lesquelles *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 ;
   — il y a $2 \times 1 = 2$ dispositions pour lesquelles *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   — il y a $1 \times 1 = 1$ disposition pour laquelle *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 **et** *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   D'après *la formule du crible*, il y a $2 + 2 - 1 = 3$ dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première **ou** de la seconde ligne sont de la même couleur.
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le carreleur peut donc réaliser } 6 - 3 = 3 \text{ échantillons}}$.

3. S'il possède n couleurs distinctes, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $n \times (n-1)$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure les dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première **ou** de la seconde ligne sont de la même couleur.
   — il y a $1 \times (n-1) = n - 1$ dispositions pour lesquelles *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 ;
   — il y a $(n-1) \times 1 = n - 1$ dispositions pour lesquelles *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   — il y a $1 \times 1 = 1$ disposition pour laquelle *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 **et** *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   D'après *la formule du crible*, il y a $2(n-1) - 1 = 2n - 3$ dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première **ou** de la seconde ligne sont de la même couleur.

   Dans ce cas, le carreleur peut donc réaliser un nombre d'échantillons égal à :
   $$\boxed{n(n-1) - (2n-3) = (n-1)n - (n - 1 + n - 2) = (n-1)^2 - (n-2) = n^2 - 3n + 3}$$

   On pourrait dénombrer autrement. Par exemple pour les dispositions de la colonne 2 on peut considérer deux cas distincts :
   — *soit la couleur en* A_2 *est distincte des couleurs de la colonne 1 et il y a* $(n-2) \times (n-2-1+1) = (n-2)^2$ *possibilités (la couleur en* A_1 *peut être en* B_2*)*
   — *soit la couleur en* A_2 *est celle en* B_1 *et il y a* $n - 2 + 1$ *dispositions (les* $n-2$ *couleurs qui ne sont pas dans la colonne 1 peuvent être en* B_2 *plus la couleur en* A_1*).*
   Au total on obtient ainsi, $(n-2)^2 + n - 1$ *dispositions possibles de la colonne 2 et donc autant d'échantillons. On peut vérifier qu'on a bien* $(n-2)^2 + n - 1 = n^2 - 3n + 3 = (n-1)^2 - (n-2)$.

Second essai

Dans cet essai, le carreleur ne s'impose pas de couleur en A_1 ni en B_1.

Une fois que les couleurs en A_1 et en B_1 sont fixées, le dénombrement des dispositions possibles pour la colonne 2 est le même que pour le premier essai, puisqu'il ne dépend pas des couleurs choisies pour la colonne 1.

Pour un nombre de couleurs donné, le nombre d'échantillons réalisables est donc le produit du nombre de dispositions distinctes pour la colonne 1 par le nombre de dispositions de la colonne 2 sachant que les couleurs dans la colonne 1 sont fixées (qui est aussi celui obtenu lorsque A_1 est noir et B_1 est gris).

1. S'il possède uniquement 2 couleurs différentes de carreaux, il y a $2 \times 1 = 2$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune 1 disposition de la colonne 2 (voir premier essai avec 2 couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } 2 \times 1 = 2.}$
2. S'il possède 3 couleurs différentes de carreaux, il y a $3 \times 2 = 6$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune 3 dispositions de la colonne 2 (voir premier essai avec 3 couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } 6 \times 3 = 18.}$
3. S'il possède n couleurs différentes de carreaux (avec $n \geq 2$), il y a $n \times (n-1)$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune $(n-2)^2 + (n-1)$ dispositions de la colonne 2 (voir premier essai avec n couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } n(n-1)((n-2)^2 + (n-1)).}$

Partie 2

Le carreleur a terminé ses essais et commence la construction de sa frise de deux carreaux de hauteur et k colonnes. Il dispose de n couleurs tel que $n \geq 2$ et décide toujours que deux carreaux de couleur identique ne peuvent pas avoir un côté commun.

Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$, le choix des couleurs pour la $p^{\text{ième}}$ colonne dépend uniquement de la disposition choisie pour la $(p-1)^{\text{ième}}$ colonne. De plus le dénombrement des dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne ne dépend pas des couleurs choisies pour la $(p-1)^{\text{ième}}$ colonne, ni de la valeur de p.

Quel que soit l'index p de la colonne, si le carreleur dispose de n couleurs, il aura autant de dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne que pour la colonne 2 lorsque la colonne 1 est occupée par un carreau noir en A_1 et un gris en B_1 (voir Partie 1 premier essai). Ce nombre de dispositions possibles pour chaque nouvelle colonne est donc de $(n-2)^2 + (n-1)$.

Notons $(F_p)_{1 \leqslant p \leqslant k}$ la suite donnant le nombre de frises à 2 lignes et k colonnes (avec $k \geqslant 1$) que le carreleur peut réaliser avec n couleurs.

On a $\boxed{F_1 = n(n-1)}$ comme on l'a vu dans la Partie 1 second essai.

De plus pour tout entier p avec $2 \leqslant p \leqslant k$ on a : $\boxed{F_p = F_{p-1} \times \left((n-2)^2 + (n-1)\right)}$.

En effet, il s'agit de choix successifs qu'on pourrait dénombrer dans un arbre et donc le nombre de frises à p colonnes est égal au nombre de frises à $p-1$ colonnes multiplié par le nombre de dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne.

On peut en déduire que la suite $(F_p)_{1 \leqslant p \leqslant k}$ est *géométrique* de raison $(n-2)^2 + (n-1)$ et de premier terme $F_1 = n(n-1)$.

Ainsi le nombre de frises à k colonnes réalisables avec n couleurs est :

$$\boxed{F_k = F_1 \times \text{raison}^{k-1} = n(n-1) \times \left((n-2)^2 + (n-1)\right)^{k-1}}$$