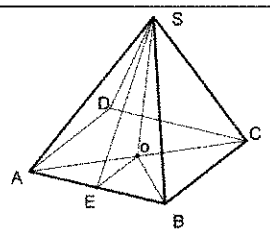


Olympiades académiques de mathématiques Classes de première Session 2016
Éléments de solution

Exercices nationaux

1. (Toutes séries) Échanges thermiques

1. a. b. c. Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a , de hauteur a	 <p>Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE, qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O</p>
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5} + 1)$	
Volume	a^3	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$	
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5} + 1)}{a}$	

d. Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé. Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.

2. a. On développe le second membre...

b. Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.

c. L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a, b, c) , s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques...

d. et e. Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy + yz + zx)$, d'où le résultat. Comme $xyz = 1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geq 6$. Et comme ce minorant est atteint en $(1, 1, 1)$, c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 ne le réalise : l'inégalité **2. b.** serait stricte.

3. a. Faire $c = 1$ pour obtenir l'équation proposée.

b. Comme $p \leq q \leq r$, la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leq 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.

c. et d. Si $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6}$, $\frac{2}{q} \geq \frac{1}{6}$. On établit d'autres majorations dans les autres cas. Dans le tableau final, on lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q} + \frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	5	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8	10	6

2. (Série S) Liber abaci

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

2. a.

k	p	q	n	$pn - q$	qn
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1 233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b. À l'issue du N -ième tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k - 1)n_k} \leq \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c. On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain N pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. a. Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geq 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b. Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a + 1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la somme précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2} + \frac{1}{2a+3} + \dots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a .

c. $\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite). Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. (Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).)

d. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0 . Si on écrit $n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).

Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question **c.** en prenant pour premier dénominateur $a + 1$ un nombre supérieur à N_0 . On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b + 1$.

Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1...

3. (séries autres que S) Demi-tour !

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion M et l'autre le pion N . Supposons $N < M$. On commence par retourner le pion M . Tous les pions de numéro inférieur ou égal à M changent de couleur. On retourne le pion N et tous les pions de numéro inférieur ou égal à N changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre $N + 1$ et M ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.

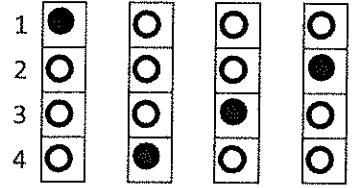
2. Deux opérations identiques s'annihilent.

3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2

4. a. et b. Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir). Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.

5. **a.** On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n , est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

b. Dans le plateau ci-contre, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. Jeu à deux dimensions

On peut appliquer la méthode de la question 4. colonne par colonne, en commençant par la colonne n . Cela garantit le blanchiment de la colonne n . On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n - 1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.

7. Trois dimensions

Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la *couche*, j le numéro de la *tranche* (compté de gauche à droite), k le numéro du *rang* (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k) , on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i, j, k .

Exercices académiques

Plier une feuille de papier

1.

$$\frac{L_1}{l_1} = \frac{L_0}{l_0}$$

ce qui d'après l'énoncé s'écrit

$$\frac{2l_0}{L_0} = \frac{L_0}{l_0}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{L_0^2}{l_0^2} = 2$$

soit, puisque $L_0 > 0$ et $l_0 > 0$

$$\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$$

2. Comme $L_0 \times l_0 = 1$ on en déduit que $L_0 = 2^{\frac{1}{4}}$ et $l_0 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$.

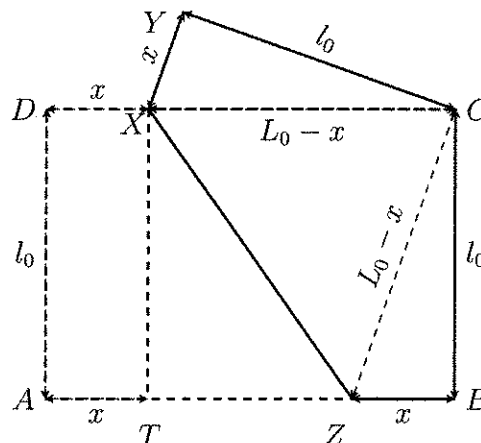
3. A chaque étape l'aire est divisée par 2. L'aire d'une feuille A4 est donc de $1/16 = 0,0625 \text{ m}^2$ c'est-à-dire de 625 cm^2 .

4. On a encore la relation $\frac{L_4}{l_4} = \sqrt{2}$ et donc $L_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,297301779 \text{ m} \approx 29,7 \text{ cm}$.

$$l_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0,210224104 \text{ m} \approx 21 \text{ cm}.$$

5. → **Solution 1**

En posant $XY = ZB = x$ et $ZC = XC = y$ et en remarquant que $YC = CB = l_0$ d'une



part et que $x+y = L_0$ et $TZ = L_0 - 2x$ d'autre part, il vient :

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + l_0^2 \\ y + x = L_0 \end{cases}$$

Soit :

$$y = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$$

Et

$$XZ^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

La hauteur du triangle CXZ vaut alors :

$$h = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{8}}$$

Finalement :

$$A(CXZ) = \frac{3}{8}$$

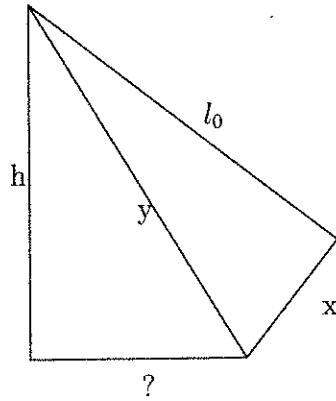
Et l'aire des deux triangles rectangles XYC et CZB vaut $x l_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \times \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

L'aire du pentagone vaut donc :

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \text{ m}^2 \text{ c'est-à-dire } 6250 \text{ cm}^2$$

→ **Solution 2**

En remarquant que la hauteur issue de C du triangle isocèle CXZ est l'axe de symétrie du pentagone, on peut replier le pentagone autour de son axe de symétrie pour obtenir le quadrilatère de la figure suivante :



x et y ont déjà été calculés. h est la longueur de la demie diagonale du rectangle de format A0 et vaut donc :

$$h = \frac{\sqrt{L_0^2 + l_0^2}}{2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{8}}$$

La mesure manquante que l'on nommera z vaut donc :

$$z = \sqrt{y^2 - h^2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{16}}$$

L'aire du quadrilatère est donc la somme des aires des deux triangles rectangles, et l'aire du pentagone, le double, soit :

$$\mathcal{A} = z \times h + x \times l_0 = \frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}{4} \times \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \times \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{8} \text{ m}^2 \text{ c'est-à-dire } 6250 \text{ cm}^2$$

→ **Solution 3**

L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du rectangle, soit $\frac{1}{2} \text{ m}^2$, à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY qui est aussi celle du triangle CZB . L'aire de ce triangle est égale à $\frac{x \times l_0}{2}$. Or on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle CZB rectangle en C :

$$\begin{aligned} ZB^2 + CB^2 &= CZ^2 \iff x^2 + l_0^2 = (L_0 - x)^2 \\ ZB^2 + CB^2 &= CZ^2 \iff 2 \times x \times L_0 = L_0^2 - l_0^2 \end{aligned}$$

Or $L_0^2 = \sqrt{2}$ et $l_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \iff 2 \times x \times L_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or $L_0 = \sqrt{2}l_0$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \iff 2\sqrt{2} \times x \times l_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \iff \frac{x \times l_0}{2} = \frac{1}{8}$$

On en déduit que l'aire du triangle CZB est $\frac{1}{8}$ et que l'aire du pentagone est égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ m}^2$ c'est-à-dire 6250 cm^2 .

→ **Solution 4**

L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du pentagone, soit $\frac{1}{2} \text{ m}^2$, à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY , celle-ci par symétrie du pentagone étant égale à l'aire du triangle ZBC .

D'après le pliage, (XZ) est la médiatrice de la diagonale $[AC]$ donc (XZ) est perpendiculaire à $[AC]$ en son milieu O .

On munit le plan de la figure d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'origine O tel que $\vec{AD} = l_0 \vec{j}$ et $\vec{AB} = L_0 \vec{i}$.

La droite (XZ) a pour vecteur normal \vec{AC} de coordonnées $(L_0; l_0)$ et elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour équation $L_0x + l_0y = 0$.

Le point Z a pour ordonnée $-\frac{l_0}{2}$ et appartient à (XZ) donc son abscisse x_Z vérifie

$$L_0x_Z + l_0y_Z = 0 \iff L_0x_Z - \frac{l_0^2}{2} = 0$$

$$L_0x_Z + l_0y_Z = 0 \iff x_Z = \frac{l_0^2}{2L_0}$$

Or $\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$ donc $l_0^2 = \frac{L_0^2}{2}$

$$L_0x_Z + l_0y_Z = 0 \iff x_Z = \frac{L_0}{4}$$

On en déduit que $ZB = \sqrt{(x_B - x_Z)^2} = |x_B - x_Z| = x_B - x_Z = \frac{L_0}{2} - \frac{L_0}{4} = \frac{L_0}{4}$.

L'aire du triangle rectangle ZBC est donc égale à $\frac{ZB \times BC}{2} = \frac{\frac{L_0}{4} \times l_0}{2} = \frac{L_0 \times l_0}{8} = \frac{1}{8}$. C'est aussi l'aire du triangle CXY et l'aire du pentagone est donc égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ m}^2$ c'est-à-dire 6250 cm^2 .

→ **Solution 5** Une dernière solution qui nécessite moins de calculs.

L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du pentagone, soit $\frac{1}{2} \text{ m}^2$, à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY .

On a (XZ) perpendiculaire à (AC) (voir solution précédente), (XT) perpendiculaire à (AB) et (TZ) perpendiculaire à (BC) .

On en déduit que le triangle ABC est un agrandissement du triangle XTZ (car tous leurs côtés sont perpendiculaires), et le facteur d'agrandissement vaut :

$$\frac{BC}{TZ} = \frac{AB}{XT} = \frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$$

Un calcul de pente donne le même résultat.

En multipliant $\frac{BC}{TZ}$ par $\sqrt{2}$, on obtient $\frac{BC\sqrt{2}}{TZ} = 2$, et comme $BC\sqrt{2} = AB$ on a $\frac{AB}{TZ} = 2$.

De plus, d'après le pliage, on a $AT = DX = XY = ZB$ et $YC = BC$ donc l'aire du triangle rectangle CXY est égale à l'aire du triangle rectangle AXT .

Comme $AB = AT + TZ + ZB = 2AT + \frac{AB}{2}$ on a $AT = \frac{AB}{4}$ et l'aire de AXT est égale à $\frac{AT \times XT}{2} = \frac{AB \times BC}{8} = \frac{1}{8}$.

Finalement, l'aire de CXY est égale à $\frac{1}{8}$ et l'aire du pentagone est égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ m}^2$ c'est-à-dire 6250 cm^2 .

Nombres *tri-tri*

1. Pour écrire un nombre *tri-tri* on a

- 3 choix possibles pour le chiffre des centaines ;
- 3 choix possibles pour le chiffre des dizaines ;
- 3 choix possibles pour le chiffre des unités ;

Soit un total de $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ nombres *tri-tri* distincts.

2. (a) On considère les nombres *tri-tri* 122 et 323.

→ **Analyse** un nombre *tri-tri* qui forme un trident avec 122 et 323 doit vérifier les contraintes suivantes :

- ☞ les chiffres des centaines de 122 et 323 sont distincts (1 et 3) donc son chiffre des centaines doit être 2 ;
- ☞ les chiffres des dizaines de 122 et 323 sont égaux à 2 donc son chiffre des dizaines doit être 2 également ;
- ☞ les chiffres des unités de 122 et 323 sont distincts (2 et 3) donc son chiffre des unités doit être 1 ;

Le nombre *tri-tri* formant un trident avec 122 et 323 doit donc être 221.

→ **Synthèse** On vérifie que 122, 323 et 221 forment un trident.

On conclut qu'il existe un unique nombre *tri-tri* formant un trident avec 122 et 323, c'est 221.

(b) Considérons deux nombres *tri-tri* a et b . On démontre comme précédemment qu'il existe un unique nombre *tri-tri* formant un trident avec eux.

→ **Analyse** Soit un nombre *tri-tri* qui forme un trident avec a et b .
Pour chacun de ses chiffres on raisonne par disjonction des cas :

- ☞ soit les chiffres de même position dans les écritures décimales de a et b sont égaux et le chiffre du nombre cherché doit être égal à cette valeur ;
- ☞ soit les chiffres de même position dans les écritures décimales de a et b sont différents et le chiffre du nombre cherché doit être différent des deux autres et ne peut prendre que le chiffre restant parmi 1, 2 ou 3 ;

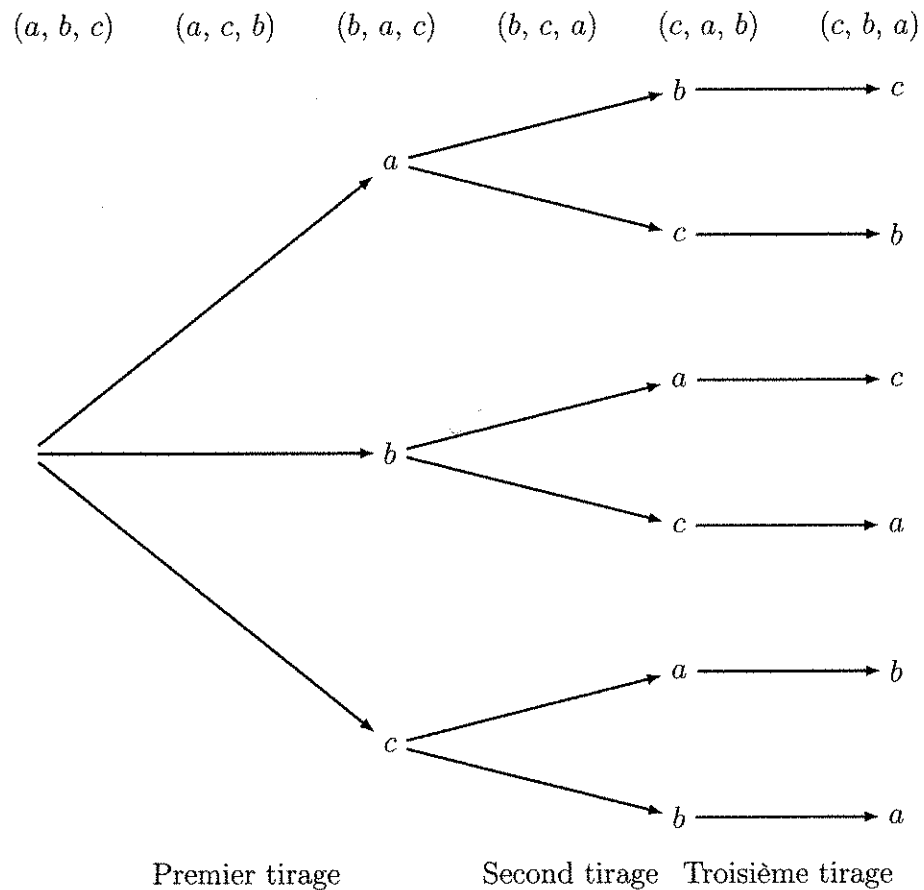
Ainsi pour chaque chiffre du nombre cherché, il existe une unique valeur possible.

→ Synthèse On vérifie immédiatement que le nombre construit dans l'analyse, forme un *trident* avec a et b .

On conclut que pour deux nombres *tri-tri* il existe un unique nombre *tri-tri* formant un *trident* avec eux.

On suppose qu'on tire au hasard successivement et sans remise trois nombres distincts dans l'ensemble des nombres *tri-tri*.

3. (a) Si on tient compte de l'ordre des tirages, on obtient six triages possibles constitués de trois nombres *tri-tri* distincts a , b et c :



Si on utilise un arbre de dénombrement, puisque le tirage est sans remise, on observe qu'on a 3 choix pour le nombre obtenu au premier tirage, puis 2 choix pour le nombre obtenu

au second tirage et enfin 1 choix pour le nombre obtenu au troisième tirage. Le nombre de tridents constitués des nombres a , b et c est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$.

- (b) En tenant compte de l'ordre des tirages et en raisonnant comme précédemment, il existe 27 choix pour le premier nombre tiré et 26 choix pour le second ce qui donne $27 \times 26 = 702$ couples de nombres *tri-tri*.

Or d'après la propriété démontrée à la question 2 . (b), tout couple de nombres *tri-tri* permet de définir un unique *trident*.

On en déduit qu'on peut tirer $27 \times 26 = 702$ *tridents* en tenant compte de l'ordre des tirages.

Or, d'après le résultat de la question 3. (a), chaque trident composé des mêmes nombres est représenté 6 fois dans cet ensemble.

Il existe donc $\frac{27 \times 26}{6} = 9 \times 13 = 117$ tridents distincts.

4. On suppose qu'on choisit au hasard un *trident* parmi l'ensemble des *tridents*.

- (a) Les tridents du type *trident2* sont constitués de nombres *tri-tri* ayant deux chiffres sur trois en commun, les autres chiffres étant tous distincts.

Si on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on examine les nombres composant un *trident2*, un *trident2* est caractérisé par les valeurs des deux chiffres égaux et par leur position dans l'écriture décimale de chaque nombre.

Notons *commun1* le chiffre associé à la plus grande puissance de dix (ou le plus à gauche dans l'écriture décimale) et *commun2* l'autre chiffre commun aux trois nombres du *trident2*.

3 valeurs de *commun1* peuvent être associées à 3 valeurs de *commun2*.

Pour chacun des $3 \times 3 = 9$ couples de chiffres ainsi constitués, il existe 3 configurations possibles, selon la position du chiffre non commun.

<i>centaines</i>	<i>dizaines</i>	<i>unités</i>
<i>commun1</i>	<i>commun2</i>	
<i>commun1</i>		<i>commun2</i>
	<i>commun1</i>	<i>commun2</i>

Au total, on a donc $3 \times 3 \times 3 = 27$ *trident2* distincts.

- (b) Si on réalise un tirage d'un *trident* parmi les 117 *tridents*, on peut considérer que l'univers de cette expérience aléatoire est constitué de 117 issues équiprobables. L'événement « Tirer un *trident2* » est réalisé par 27 issues. Sa probabilité est donc égale à $\frac{27}{117} = \frac{3}{13}$.

- (c) Les tridents du type *trident1* sont constitués de trois nombres *tri-tri* ayant un chiffre sur trois en commun, les deux autres chiffres étant tous distincts.

Si on considère un *trident1*, il existe 3 valeurs possibles pour le chiffre commun et 3 positions pour chacune d'entre elles dans l'écriture décimale des nombres. Ensuite, il reste à choisir les deux chiffres non communs.

Pour chacune de ces $3 \times 3 = 9$ possibilités, on peut ranger les nombres du *trident1* dans l'ordre croissant de la valeur du chiffre non commun le plus à gauche dans l'écriture décimale. Il reste une liste de trois valeurs distincts pour le second chiffre non commun à choisir parmi 1, 2 ou 3, ce qui donne trois possibilités pour la première valeur de la liste, puis deux possibilités pour la seconde et une possibilité pour la dernière, c'est-à-dire un total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ listes possibles.

On donne ci-dessous les 6 possibilités lorsque le chiffre commun est celui des centaines.

<i>centaines</i>	<i>dizaines</i>	<i>unités</i>
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)
<i>commun</i>	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)

Au total on a donc $3 \times 3 \times 6 = 54$ *trident1*.

En raisonnant comme en 4. (b) on trouve que la probabilité d'avoir un *trident1* en tirant au hasard un *trident* dans l'ensemble de tous les *tridents* est de $\frac{54}{117} = \frac{6}{13}$.

- (d) Il n'existe que trois sortes de *tridents*. On a dénombré 27 *trident2* et 54 *trident1* parmi les 117 *tridents*. Il y a donc $117 - 27 - 54 = 36$ *trident0*.

En raisonnant comme en 4. (b) on trouve que la probabilité d'avoir un *trident2* en tirant au hasard un *trident* dans l'ensemble de tous les *tridents* est de $\frac{36}{117} = \frac{4}{13}$.

On aurait pu faire directement un calcul de probabilités.

Sachant que les événements « Tirer un *trident2* » de probabilité $\frac{3}{13}$, « Tirer un *trident1* » de probabilité $\frac{6}{13}$ et « Tirer un *trident0* » forment une partition de l'univers de cette expérience aléatoire, la probabilité d'avoir un *trident0*, est égale à $1 - \frac{3}{13} - \frac{6}{13} = \frac{4}{13}$.

5. On trouve facilement un ensemble de 8 nombres *tri-tri* sans *trident* :

$$111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222$$

mais on trouve même un ensemble de 9 nombres *tri-tri* sans *trident* :

$$111, 113, 131, 133, 222, 312, 321, 323, 332.$$

Démontrons qu'un tel ensemble de 10 nombres *tri-tri* n'existe pas, en faisant appel à la géométrie.

→ On peut étudier la géométrie en trois dimensions non seulement avec des nombres réels, mais aussi avec des entiers modulo 3, c'est-à-dire des entiers soumis à la règle de calcul $-3 = 0 = 3 = 6$, $-2 = 1 = 4 = 7$, $-1 = 2 = 5 = 8$, ...

Cet espace contient seulement 27 points qu'on peut représenter avec nos nombres *tri-tri* de coordonnées (*centaine, dizaine, unité*) dans un repère de cet espace.

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $B - A = m \times (C - A)$ (opérations sur les coordonnées), où $m = 2 = -1$, car $m = 0$ donne $A = B$ et $m = 1$ donne $B = C$.

Trois points A, B, C sont donc alignés si et seulement si $B - A = A - C \Leftrightarrow B + C - 2A = 0 \Leftrightarrow B + A + C = 0$ puisque $-2 = 1$ modulo 3.

Autrement dit, A, B, C sont alignés si et seulement si les nombres *tri-tri* forment un *trident*.

Chaque droite de notre espace contient donc exactement trois points, et chaque plan contient exactement 9 points de coordonnées dans un repère de ce plan :

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$$

Dans un plan (de 9 points) on peut trouver 4 points, dont 3 ne sont jamais alignés, par exemple 111, 113, 131, 133, mais on ne peut pas y trouver 5 points sans alignement c'est-à-dire sans *trident*. En effet, regardons notre plan comme union de trois droites parallèles a, b, c , et supposons que c contienne seulement un de nos 5 points, appelé P (si a, b ou c contient 0 points, alors une autre de ces droites contient 3 points qui sont donc alignés, et si a, b, c en contiennent au moins 2, il y a au moins 6 et non 5 points).

Trois droites de notre plan différentes de c passent par P , et chacune coupe a et b en deux points différents. Une de ces trois droites contient donc deux de nos 5 points considérés autres que P (puisque ces trois droites contiennent les 4 points et que $\frac{4}{3} > 1$), donnant avec P l'alignement cherché.

→ De même, dans l'espace (de 27 points) on peut trouver 9 points, dont 3 ne sont jamais alignés, voir l'exemple plus haut, mais on ne peut pas y trouver 10 points sans alignement c'est-à-dire sans *trident*.

En effet, regardons notre espace comme union de trois plans parallèles a, b, c , et supposons que c contient exactement 2 ou 3 de nos 10 points considérés (si a, b ou c contient 0 ou 1 point, alors un autre de ces plans en contient au moins 5 et c'est fini, voir plus haut, et si a, b, c en contiennent au moins 4, il y a au moins 12 points et non 10). Appelons P et Q deux de nos points du plan c considérés. Trois plans de notre espace différents de c passent par P et Q , et chacun coupe a et b en six points différents (puisque l'intersection de deux plans est une droite c'est-à-dire trois points).

Un de ces trois plans contient donc au moins trois de nos 10 points considérés en dehors du plan c (car il y a au moins $10 - 3 = 7$ points considérés en dehors de c , répartis entre trois plans contenant P et Q et que $\frac{7}{3} > 2$).

Avec P et Q , ça donne au moins 5 points considérés dans un plan et donc l'alignement cherché d'après ce qu'on a démontré précédemment.
