

National 1 (toutes séries)
Sommes de carrés en abyme : une rédaction possible

1. **a.** On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2
 $f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intercalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

| | | | | | |
|------|----|----|---|---|---|
| 301 | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 23 | 13 | 10 | 1 | 1 | 1 |
| 1030 | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

4. **a.** L'algorithme affiche 20 puis 4.

b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N , tel que $u_N = 1$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 1$. De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M , les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.

Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4. L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.

c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1$ et $u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.

d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

5. **a.** Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :

$$x - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$

Le terme $a(100 - a)$ est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.

Le terme $b(10 - b)$ est positif.

Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$

On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier.

b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante... Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.

La propriété \mathcal{P} est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

6. **a.** Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p \geq 4, 9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1$ (on fait apparaître $10^{p-1} - 1$)

On peut écrire $10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \dots + 10^1 + 1) + 1$

Dans la parenthèse se trouvent $p - 4$ entiers supérieurs à 1, dont $p - 3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10(p - 3) + 1$. Finalement $10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10^1 + 1 \geq 100p - 289$. Ce dernier terme est supérieur à $9p$ dès que $p > 3$.

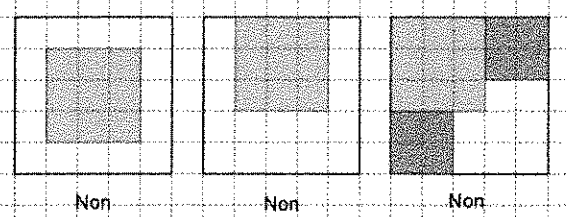
b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.

c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété \mathcal{P} est vraie.

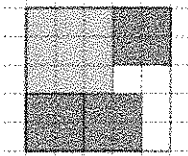
National 2 (série S) 1, 2, 3 ... allez ! Une rédaction possible

1. **a.** Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.

b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).



c. La figure de gauche montre un tel pavage.

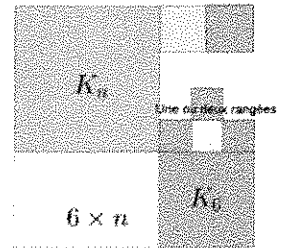


2. $u(1) = 1, u(8) = 0, u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit...), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.

3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2 carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2 carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.

4. **a.** Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.

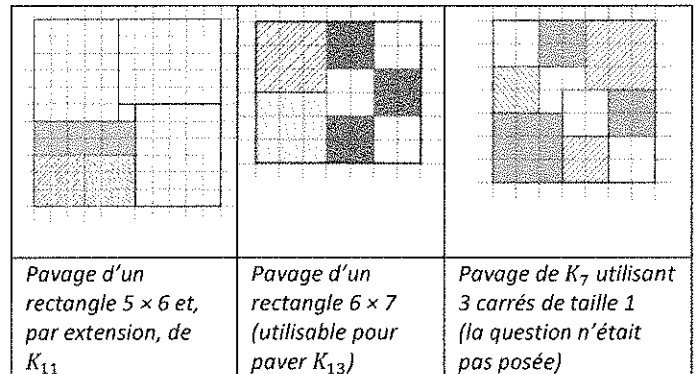
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.



5. **a.** La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11} . Cela montre que $u(11) \leq 1$.

b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13} . Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.

c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question 4. **b.**, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.



6. **a.** Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang

impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1). Le total est donc $2p + 1$.

| | | | | | | |
|--------------|-----------|----|---|-----|----------------|---|
| Ligne $2q$ | 0 | -1 | 0 | ... | -1 | 0 |
| Ligne $2q-1$ | 1 | 0 | 1 | ... | 0 | 1 |
| | Colonne 1 | | | | Colonne $2q+1$ | |

d'un tel carré de taille 3 peuvent se quatre positions possibles d'un carré de sommes possibles sont -3, 0 et 3.

c. La même figure sert à étudier ce qu'il mêmes conditions (il suffit cette fois de d'un carré de taille 2 dans un carré de coefficients est constante égale à 0.

| | | | | |
|--------------|--------------|---|----|---|
| | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Ligne $2p+1$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Ligne $2p$ | -1 | 0 | -1 | 0 |
| | Colonne $2q$ | | | |

b. La façon dont les coefficients des cases répartir peut être étudiée en observant les taille 3 dans un carré de taille 4. Les

advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les considérer les quatre positions possibles taille 3). Cette fois la somme des

d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.

e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.

f. $2\ 017 = 1 + 4 \times 21 \times 24$. Ce qui montre que 2 017 est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\ 017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1.

National 3 (Non 5) Boîtes de canelés bordelais : Rédaction possible

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car $9 + 6 > 10$ et $6 + 6 > 10$. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car $16 + 6 > 20$, $12 + 9 > 20$, $12 + 2 \times 6 > 20$, $4 \times 6 > 20$. En revanche, $12 + 2 \times 9 = 30$.

2. *a.* Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 17 | 19 | 20 | 23 | 26 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.

c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.

3. *a.* Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.

b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.

4. *a.* On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.

b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.

c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

5. *a.* On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.

b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.

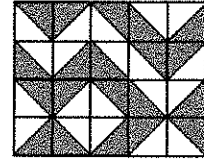
6. On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).

Pavages de Truchet, proposition de correction :

PARTIE 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

- 1) Pour chacune des 6 cases, on a 4 positions A, B, C, D possibles d'où $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4096$ pavages de Truchet 2×3 .
- 2) De façon générale, le nombre de pavages de Truchet $p \times q$ est égal à : $4^{nb \text{ cases}} = 4^{pq}$.

PARTIE 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires



- 1) En respectant la règle de coloration des pavages linéaires, on obtient le pavage ci-contre :
- 2) En suivant la logique de construction du 1), on complète l'algorithme de la façon suivante :

| | | | |
|--------------------|----------------------|-------|---|
| Si $G(i) = A$ ou C | ET $L(i+1) = A$ ou D | alors | Mettre la lettre B dans $G(i+1)$ |
| Si $G(i) = A$ ou C | ET $L(i+1) = B$ ou C | alors | Mettre la lettre D dans $G(i+1)$ |
| Si $G(i) = B$ ou D | ET $L(i+1) = A$ ou D | alors | Mettre la lettre C dans $G(i+1)$ |
| Si $G(i) = B$ ou D | ET $L(i+1) = B$ ou C | alors | Mettre la lettre A dans $G(i+1)$ |

- 3) D'après 2), un pavage linéaire est défini de façon unique par sa 1^{ère} ligne ($L(1) \dots L(q)$) et sa 1^{ère} colonne (les $G(1)$ successifs), il faut donc dénombrer les 1^{ères} lignes et les 1^{ères} colonnes que l'on peut former dans un pavage linéaire. Le 1^{er} carreau (1^{ère} ligne et 1^{ère} colonne) fixe l'alternance de couleurs des côtés de la 1^{ère} ligne, de sorte que pour chaque case de cette la ligne on a à chaque fois 2 possibilités d'orientation de carreaux (A ou C ; B ou D). Il en est de même pour la 1^{ère} colonne (avec A ou D ; B ou C). Pour un 1^{er} carreau donné, il y a donc 2^{q-1} façons de compléter la 1^{ère} ligne et 2^{p-1} façons de compléter la 1^{ère} colonne. Enfin comme il y a 4 façons de placer le 1^{er} carreau, il y a donc :

$$4 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^2 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^{p+q} \text{ pavages linéaires } p \times q.$$

PARTIE 3 : Composition des pavages linéaires

- 1) **a)** Un tableau linéaire code uniquement l'orientation des diagonales, indépendamment des couleurs (codage d'un pavage "incolore" en quelque sorte), or le choix d'une des deux couleurs pour l'un des triangles du pavage entraîne, par adjacences successives, les couleurs de tous les autres : il y a donc exactement 2 pavages linéaires associés à un même tableau linéaire, or avec 3) de la Partie 2, il y a $2^{2+2} = 16$ pavages linéaires 2×2 et donc $16/2 = 8$ tableaux linéaires 2×2 .
- b)** On peut identifier ces huit tableaux dans l'exemple donné dans l'énoncé :

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

- c)** Grâce aux tableaux 2×2 , il apparaît que :

- Si les codes de la 1^{ère} colonne sont identiques, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite, colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors identiques.
- Si les codes de la 1^{ère} colonne sont distincts, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors complémentaires.

- 2) **a)** Les triangles d'un même carreau ayant deux couleurs distinctes (à gauche et à droite, en bas et en haut), ils ne peuvent être placés côte-à-côte (ni en ligne, ni en colonne) pour respecter la règle de coloration linéaire.
- b)** Avec **a**), si deux carreaux adjacents ont le même code alors ils sont distincts : il s'agit donc des deux carreaux partageant ce code.

On déduit que le 1^{er} tableau a pour composition $2A + 2B$, le 2^{ème} a pour composition $2C + 2D$, et que les 4 suivants ont pour composition $1A + 1B + 1C + 1D$.

Enfin si deux carreaux adjacents ont des codes distincts alors, par ligne : A est adjacent à D et B est adjacent à C, et par colonne : A est adjacent à C et B est adjacent à D.

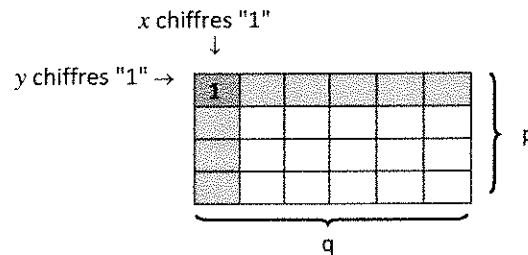
On déduit que les deux derniers tableaux ont aussi pour composition $1A + 1B + 1C + 1D$.

c) p et q étant pairs, on peut partitionner le tableau linéaire $p \times q$ par des tableaux linéaires 2×2 .

Or d'après b), il y a dans ces tableaux autant de A que de B (codés "1") et de C que de D (codés "0"), donc pour trouver la composition en A, B (respectivement en C, D) il suffit de dénombrer les "1" (respectivement les "0" : à compléter avec $p \times q$) et de diviser par 2.

D'après 1) c), les lignes commençant par le même code sont identiques (sinon elles sont complémentaires) ainsi :

- Cas d'une 1^{ère} case codée "1" :



Le tableau est composé de : x lignes de 1^{ère} case "1" contenant y codes "1"

et, par complémentarité : $(p - x)$ lignes de 1^{ère} case "0" contenant $(q - y)$ codes "1"

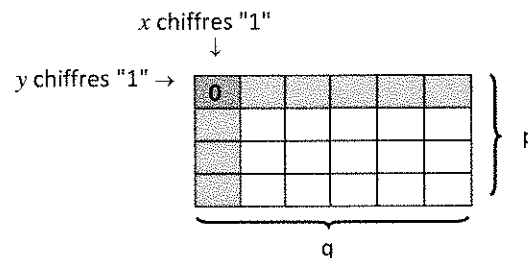
d'où le nombre total de "1" : $xy + (p - x)(q - y) = pq + 2xy - qx - py$

et le nombre total de "0" : $pq - (pq + 2xy - qx - py) = qx + py - 2xy$

D'où le nombre de carreaux A, et de carreaux B : $\frac{1}{2} (pq + 2xy - qx - py)$

et le nombre de carreaux C, et de carreaux D : $\frac{1}{2} (qx + py - 2xy)$

- Cas d'une 1^{ère} case codée "0", cette fois :



Le tableau est composé de : $(p - x)$ lignes de 1^{ère} case "0" contenant y codes "1",

x lignes de 1^{ère} case "1" contenant $(q - y)$ codes "1",

d'où le nombre total de codes "1" dans le tableau : $y(p - x) + x(q - y) = qx + py - 2xy$

et le nombre total de codes "0" dans le tableau : $pq - (qx + py - 2xy) = pq + 2xy - qx - py$

D'où le nombre de carreaux A, et de carreaux B : $\frac{1}{2} (qx + py - 2xy)$

et le nombre de carreaux C, et de carreaux D : $\frac{1}{2} (pq + 2xy - qx - py)$

CQFD !

Vous trouverez ci-après des compléments annexes à l'exercice.

Compléments

- *Autre méthode pour le cas d'une 1^{ère} case "0" : En inversant tous les "0" et les "1" du tableau, on a un tableau linéaire $p \times q$ de 1^{ère} case "1", et la formule comptant les "1" de ce dernier est utilisable pour compter les "0" du premier à ceci près que les paramètres x et y désigneront cette fois un nombre de "0" donc il suffit de remplacer x par $(p - x)$ et y par $(q - y)$ dans la formule $xy + (p - x)(q - y)$, laquelle reste inchangée : on obtient donc les mêmes formules d'un cas à l'autre, mais en inversant les "binômes" de carreaux A;B et C;D*
- *Il est intéressant de noter que la composition précise en carreaux A, B, C, D des pavages linéaires étudiés ne dépend que du nombre de "/" des carreaux de la 1^{ère} ligne et de la 1^{ère} colonne, quels que soient leur coloration ou leur ordre : plusieurs pavages linéaires partagent donc les mêmes compositions.*
- *Dans le cas où p ou q sont impairs, on ne peut plus partitionner le tableau avec des tableaux 2×2 , et même si la méthode de dénombrement des "0" et des "1" reste valable, la dernière ligne et/ou colonne impaire(s) n'assure plus l'égalité entre le nombre de carreaux A et B ; C et D. Il faudrait donc plus d'informations pour pouvoir conclure (cela serait possible, mais un peu long dans le cadre de cet exercice).*
- ***Jean Truchet** (1657–1729), né à **Lyon**, inventeur français notamment dans le domaine des mathématiques, fut l'un des premiers à étudier la théorie et le dénombrement des pavages non triviaux, laissant son nom à certains d'entre eux.*
- *Les pavages de Truchet peuvent prendre différentes formes suivant les motifs des carreaux, et ont inspiré plusieurs artistes contemporains tels que Jean-Claude Ferry :
(http://jcferry.pagesperso-orange.fr/peinture/peinture/talon_architecte.html)*

Partie 1

1. L'écriture binaire de 135 est $(10000111)_2$.
2. Le nombre dont la représentation en base deux est $(101011)_2$ est :

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, dans l'écriture en base deux est $(\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}})_2$, tous les bits sont chargés au maximum donc il faut un bit supplémentaire pour représenter l'entier suivant qui sera $(\underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ fois}})_2$. Or ce dernier est 2^n , donc $(\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}})_2$ représente l'entier $2^n - 1$.

Partie 2

Partie A

1. Voici la liste des 23 palindromes binaires compris entre 1 et 129 :

[(1, '1'), (3, '11'), (5, '101'), (7, '111'), (9, '1001'), (15, '1111'), (17, '10001'), (21, '10101'), (27, '11011'), (31, '11111'), (33, '100001'), (45, '101101'), (51, '110011'), (63, '111111'), (65, '1000001'), (73, '1001001'), (85, '1010101'), (93, '1011101'), (99, '1100011'), (107, '1101011'), (119, '1110111'), (127, '1111111'), (129, '10000001')]

2. En utilisant l'un des algorithmes de conversion de la partie A, on trouve que l'écriture binaire de 2 017 est $(11111100001)_2$ donc 2 017 n'est pas une année palindrome binaire.
3. La prochaine année palindrome binaire sera $(1111111111)_2$ c'est-à-dire $2^{11} - 1 = 2047$.

Partie B

1. Palindromes binaires :

- avec 3 chiffres binaires, il y en a deux : 101 et 111
- avec à 4 chiffres binaires, il y en a deux : 1001 et 1111
- avec 5 chiffres binaires, il y en a quatre : 10001, 11011, 11111 et 10101
- avec 6 chiffres binaires, il y en a quatre : 100001, 101101, 110011 et 111111
- avec 7 chiffres binaires, il y en a huit : 1001001, 1000001, 1011101, 1010101, 1101011, 1100011, 1111111, 1110111.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ le nombre de palindromes binaires à n chiffres. Dans chaque cas, puisque le bit de poids le plus fort est 1, le bit de poids le plus faible doit être 1 aussi.

• **Premier cas, n est pair**

Il reste deux blocs de $\frac{n-2}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, qui sont symétriques :

$$(1 \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} 1)$$

Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-2}{2}$ bits de poids forts qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

Il y a $2^{\frac{n-2}{2}}$ palindromes binaires si n est pair.

• **Deuxième cas, n est impair**

Il reste deux blocs de $\frac{n-3}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, symétriques par rapport au bit en position médiane $\frac{n+1}{2}$:

$$(1 \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \overbrace{1}^{\text{médian}} \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} 1)$$

Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-3}{2}$ bits de poids forts et le bit médian, qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.

Il y a $2^{\frac{n-3}{2}} \times 2 = 2^{\frac{n-1}{2}}$ palindromes binaires si n est impair.

Partie C

On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.

1. • $F(2^5)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à 1, 2, 3, 4 ou 5 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^5) = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$$

- $F(2^6)$ s'obtient en ajoutant à $F(2^5)$ le nombre de palindromes binaires à 6 chiffres binaires donc d'après la question 1. de la partie B :

$$F(2^6) = F(2^5) + 4 = 10 + 4 = 14$$

2. $F(2^n)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à k chiffres binaires avec $1 \leq k \leq n$.

a. Premier cas, $n = 2p$ est pair :

$$S_{2p} = \sum_{k=1}^p 2^{\frac{2k-2}{2}} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{\frac{2k+1-1}{2}}$$

$$S_{2p} = \sum_{k=1}^p 2^{k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^k$$

$$S_{2p} = 2 \times \sum_{k=0}^{p-1} 2^k$$

$$S_{2p} = 2 \times (2^p - 1)$$

$$S_{2p} = 2 \times 2^p - 2$$

$$F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est pair.}$$

b. Deuxième cas, $n = 2p + 1$ est impair :

$$S_{2p+1} = S_{2p} + 2^{\frac{2p+1-1}{2}}$$

$$S_{2p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^p$$

$$S_{2p+1} = 3 \times 2^p - 2$$

$$F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

3. Soit x un nombre entier naturel tel que $x > 5$.

On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x .

a. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$.

$2^n \leq x$ donc $F(x)$ est la somme de $F(2^n)$ et des nombres de palindromes binaires supérieurs ou égaux à 2^n et inférieurs à x .

Or ce nombre est positif donc $F(2^n) \leq F(x)$.

Comme $x < 2^{n+1}$, le même raisonnement nous conduit à $F(x) \leq F(2^{n+1})$.

Plus généralement, la suite $(F(x))_{x \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs, $2^{n+1} - 1$, dont l'écriture en base deux est $\underbrace{(111 \dots 111)}_{n+1 \text{ fois}}_2$, est un palindrome binaire qui est compté dans $F(2^{n+1})$ mais pas dans $F(x)$ car $x < 2^{n+1}$.

On a donc $F(x) < F(2^{n+1})$.

$$\text{Si } 2^n \leq x < 2^{n+1} \text{ alors } F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1}).$$

b. Soit n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$. D'après les deux questions précédentes on a :

• Premier cas, n est pair et $n + 1$ impair :

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$

$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n+1-1}{2}} - 2$$

$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or on a $2^n \leq x < 2^{n+1} \iff 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$ et $2^{\frac{n+2}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2$.

De plus $2^{\frac{n+1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} - 1) - 2 > 0 \iff n \geq 4$.

Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 4$ et $x \geq 2^4$.

Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.

On en déduit donc que si n est pair et $n \geq 4$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

• Deuxième cas, n est impair et n est pair :

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$

$$3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{n+1+2}{2}} - 2$$

$$3 \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $3 > 2^{\frac{3}{2}}$ donc on a :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^n \leq x < 2^{n+1} \iff 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$.

De plus $\frac{3}{\sqrt{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \times (\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}) - 2 = 2^{\frac{n}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$.

Or $2^{\frac{n}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \geq 0 \iff n \geq 3$.

Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 3$ et $x \geq 2^3$.

Par ailleurs $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.

On en déduit donc que si n est impair et $n \geq 3$ alors :

$$\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

Les seuls cas restant sont $n = 1$ et $n = 2$ ce qui correspond à deux entiers supérieurs à 5 : $x = 6$ et $x = 7$.

Or $1 = (1)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$, $4 = (100)_2$, $5 = (101)_2$, $6 = (110)_2$ et $7 = (111)_2$, donc on a $F(6) = 3$ et $F(7) = 3$.

On vérifie bien que $\sqrt{6} < F(6) < 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{7} < F(7) < 3\sqrt{7}$.

Pour tout entier $x > 5$, on a $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$.

On donne ci-dessous une représentation graphique de cet encadrement pour tous les entiers inférieurs ou égaux à 1 000 puis à 1 000 000.

$$\forall x \geq 5, \sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$$

