

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

Bataille Navale. Éléments de correction

Partie A

1. a) 6 positions différentes. Il peut occuper une ligne (3 possibilités) ou une colonne (3 possibilités).
 b) Plusieurs possibilités. Par exemple :

	x	
		x
x		

x		
	x	
		x

ou

c) Avec

deux tirs on ne touche qu'une ou deux lignes (resp. colonnes).

Un bateau placé sur une des lignes (resp. colonnes) non touchées n'est pas atteint. On ne peut donc pas réaliser de jeu optimal avec deux tirs.

d) D'après c) $J(3) > 2$. D'après b) : $J(3) \leq 3$. Donc $J(3) = 3$.

2. a)

Il faut au moins 5 tirs pour toucher à coup sûr chacune de ces positions possibles du bateau.

Donc $J(4) \geq 5$.

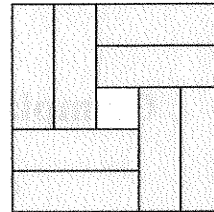
b) Par exemple :

	x		
		x	
x			x
	x		

Que le bateau soit sur une ligne (2 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (2 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre. Et on ne peut pas réaliser cela avec moins de 5 tirs cf a). Donc le jeu représenté est un jeu optimal et $J(4) = 5$

3. On peut placer le bateau sur l'une des huit positions deux à deux disjointes grisées ci-contre.

Un jeu optimal doit permettre de toucher le bateau dans toutes ces positions (et dans d'autres). Il faut au moins huit tirs, un au moins par zone grisée. Donc $J(5) \geq 8$



Que le bateau soit sur une ligne (3 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (3 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre.

Le jeu visualisé ci-contre permet donc à coup sûr de toucher le bateau, où qu'il soit.

Ce jeu comporte 8 tirs. Donc $J(5) \leq 8$.

		x		
		x		
x	x		x	x
		x		
		x		

$J(5) \geq 8$ et $J(5) \leq 8$ donc : $J(5) = 8$

Partie B

1. Cas $n = 3p$

a) On peut identifier sur chaque ligne (ou colonne) p blocs successifs de trois cases. Ceci sur $3p$ lignes (ou colonnes). Cela permet de recouvrir complètement le damier à l'aide de $3p^2$ blocs deux à deux disjoints de trois cases alignées. Il faut donc au moins $3p^2$ tirs pour espérer toucher le bateau, où qu'il se trouve.

Donc $J(3p) \geq 3p^2$.

b) et c) On considère le damier $n \times n$ comme une juxtaposition de p^2 damiers 3×3 cases. On place dans chacun de ces damiers les croix de la même façon, comme en A-1-b). On vérifie que sur chaque ligne les croix successives sont espacées de deux cases. Ce qui ne laisse pas de place à trois cases consécutives non atteintes par un tir. De même sur les colonnes

Ce jeu permet donc de toucher le bateau où qu'il soit. Et il est composé de $3p^2$ tirs. D'après a), il n'existe pas de jeu comportant moins de tirs et permettant de toucher le bateau où qu'il soit. Donc ce jeu est optimal et $J(3p) = 3p^2$

	x			x	
		x			x
x			x		
	x				
		x			
x					

2. Cas $n = 3p + 1$

a) Pour obtenir le damier $(3p+1) \times (3p+1)$ on complète le damier $3p \times 3p$ par une ligne de $3p+1$ cases en bas et une colonne de $3p$ cases à droite. A partir des $3p^2$ blocs successifs de trois cases déjà obtenus sur le damier $3p \times 3p$, on peut ajouter p blocs successifs de trois cases en position horizontale en bas et p blocs successifs de trois cases en position verticale à droite. Il reste une case non recouverte dans le coin. On obtient ainsi $3p^2 + 2p$ blocs successifs de trois cases deux à deux disjoints.

Donc $J(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$.

b) et c) Reprenant la grille du jeu optimal pour le cas $n=3p$, on complète par des croix comme dans A-2-b), sur la ligne rajoutée en bas et sur la colonne rajoutée à droite. On rajoute ainsi $2p$ croix aux $3p^2$ croix déjà placées. D'où un jeu de $3p^2 + 2p$ tirs qui permet de toucher à coup sûr le bateau. Il est optimal d'après a) et $J(3p + 1) = 3p^2 + 2p$

3.

a) Plusieurs démarches possibles. Par exemple :

dans tous les cas, $J(n)$ est un entier (par sa définition même).

Si $n = 3p$: $J(n) = 3p^2$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2$.

Donc, $J(n)$, qui est égal à $\frac{n^2}{3}$, est a fortiori inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$ et l'entier suivant, $J(n) + 1$ est strictement supérieur à $\frac{n^2}{3}$. Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

Si $n = 3p + 1$: $J(n) = 3p^2 + 2p$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc, $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 2p + 1$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

Si $n = 3p + 2$: $J(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3} = 3p^2 + 4p + 1 + \frac{1}{3}$. Donc, $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 4p + 2$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b) La réponse est non : En effet, $\frac{77^2}{3} < 1977$ $2028 = \frac{78^2}{3}$ donc $J(n) < 2020$ si $n \leq 77$ et $J(n) > 2020$ si $n \geq 78$.

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Ensembles surprenants

1. **a.** Soit $E = \{1, 2, 3, 2\,020\}$. $P(E) = 1 \times 2 \times 3 \times 2\,020 = 12\,120$

et $C(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2\,020^2 = 4\,080\,414$. Donc E n'est pas surprenant.

b. Soit $F = \{6, 15, 87\}$. $P(F) = 6 \times 15 \times 87 = 7\,830$ et $6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$. F est un ensemble surprenant.

2. **a.** L'égalité s'écrit aussi : $(x - 1)(P(A) - 1 - x) = 0$. Il y a deux solutions, 1 et $P(A) - 1$.

b. Supposons que le nombre $P(A) - 1$ appartient à A . Il existe donc un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 1)$.

On peut encore écrire : $(k - 1)P(A) = k$, ce qui implique que $k - 1$ divise k et donc $k = 2$ et finalement $P(A) = 2$, ce qui est exclu par l'énoncé.

c. Comme $A' = A \cup \{P(A) - 1\}$, on a : $P(A') = P(A) \times (P(A) - 1)$ et $C(A') = C(A) + (P(A) - 1)^2$. On obtient $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1$.

d. En ajoutant un élément nouveau (bien choisi) à l'ensemble A , on obtient un nouvel ensemble pour lequel la différence entre le produit des éléments et la somme des carrés est diminuée de 1 par rapport à A . En opérant $n = P(A) - C(A)$ fois cet élargissement, on parvient à $A_n = B$ tel que $P(A_n) - C(A_n) = 0$, donc à un ensemble surprenant contenant A . Il n'y a pas de risque de rencontrer un élément déjà dans l'ensemble d'après 2. **b.**

e. Appliquons l'algorithme précédent à l'ensemble $G = \{3, 4, 9\}$

Éléments de l'ensemble	Leur produit P	La somme de leurs carrés	$P - 1$
3, 4, 9	108	106	107
3, 4, 9, 107	11 556	11 555	11 555
3, 4, 9, 107, 11 555	133 529 580	133 529 580	

Comme dit plus haut, il a fallu deux opérations pour parvenir à un ensemble surprenant.

3. **a.** Supposons que le nombre $P(A) - 2$ appartienne à A . Il existe un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 2)$. Cette égalité s'écrit : $(k - 1)P(A) = 2k$. On en conclut que $k - 1$ divise $2k$. Il s'ensuit que $k = 2$ ou $k = 3$ (*), ce qui donne les possibilités $P(A) = 4$ ou $P(A) = 3$, contrairement à l'hypothèse.

$$f(A_1) - f(A) = P(A)(P(A) - 2) - C(A) - (P(A) - 2)^2 - P(A) + C(A)$$

Où encore : $f(A_1) - f(A) = P(A) + 4$.

- ou bien $f(A_n) = 0$, auquel cas c'est terminé, A_n est surprenant ;
- ou bien $f(A_n) > 0$, et on est ramené à la situation de la question 2. On sait comment continuer pour trouver un ensemble surprenant qui contienne tous ceux qui l'ont précédé dans le processus, dont A .

5. On a vu au début de l'énoncé que $P(A) = 10$ et $C(A) = 30$. On applique l'algorithme du 3. **b.**

La différence $P(A_2) - C(A_2)$ est cette fois égale à 62 ; elle relève donc de l'algorithme du 2. **d.** Avec cette méthode, on adjoint 62 éléments aux 5 de A_2 . Cela en fait 67 (on ne saurait les écrire tous, le nombre de chiffres augmente très vite...)

3. Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

1.

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
R	O	B	P	S	L	D	G	H	V

2.

J	W	W	N	N		M	N	B		V	J	C	Q	N	V	J	C	R	Z	D	N	B
A	N	N	E	E		D	E	S		M	A	T	H	E	M	A	T	I	Q	U	E	S

3. La signature d'Alan Turing nous permet de trouver la clé :

A	L	A	N		T	U	R	I	N	G
E	P	E	R		X	Y	V	M	R	K

La clé est manifestement 4.

Les deux autres membres de phrases se décodent ainsi :

M	I	L	L	E		N	E	U	F		C	E	N	T		D	O	U	Z	E
Q	M	P	P	I		R	I	Y	J		G	I	R	X		H	S	Y	D	I

T	C	X	L	E	K	S	V	I		R	I		E	Y		W	M	B	M	I	Q	I		W	M	I	G	P	I
P	Y	T	H	A	G	O	R	E		N	E		A	U		S	I	X	I	E	M	E		S	I	E	C	L	E
E	Z	E	R	X		N	I	W	Y	W		G	L	V	M	W	X												
A	V	A	N	T		J	E	S	U	S		C	H	R	I	S	T												

4. Pour la lettre B, on a $x = 1$, par conséquent $ax + b = 26$. Le reste est 0, qui correspond à A.

5. Pour la lettre D, on a $x = 3$, par conséquent $ax + b = 70 = 2 \times 26 + 18$ et 18 correspond à la lettre S ;

Pour la lettre Q, on a $x = 16$, par conséquent $ax + b = 356 = 13 \times 26 + 18$ et 18 correspond à la lettre S.

Où on voit que deux lettres distinctes sont codées par la même lettre, ce qui peut être fâcheux si cela se produit dans un trop grand nombre de cas.

6. a.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m = ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$m = ax + b$	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

b. Avec cette clé, deux lettres différentes ne sont pas codées par une même lettre.

7. Voici le décodage :

E	Z	-	Q	P	E	U	E	B	Y	V	I	Y		R	O		O	R		K	O	J	T
A	L		K	H	A	W	A	R	I	Z	M	I		N	E		E	N		S	E	P	T
W	O	R	T		S	C	E	T	B	O		L	Y	R	G	T	K						
C	E	N	T		Q	U	A	T	R	E		V	I	N	G	T	S						

8. Dire que x est codé par y revient à dire qu'il existe un entier naturel k compris entre 0 et 8 tel que :

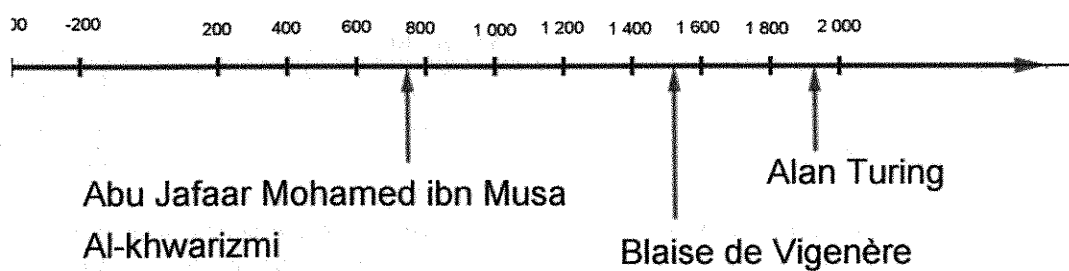
$9x + 4 = y + 26k$. Ce qui conduit à $27x = 3y + 14 + 26(k - 1)$ ou encore à $x = 3y + 14 + 26m$. On vérifie que le tableau de codage de la question 6. a. peut être lu « à l'envers » en appliquant au nombre représentant y la fonction $y \mapsto 3y + 14$ et en prenant le reste modulo 26 du résultat.

9. « Principal défaut » : expression un peu forte pour dire que chaque lettre est toujours représentée par la même lettre et qu'on peut donc trouver une partie de la correspondance en observant la date, la signature, les lettres doublées, etc. (évidemment, ça va mieux quand on a lu ça quelque part).

10.

Rang de la lettre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Lettre à décoder	H	Q	R	P	R	G	Z	R	L	K	K	R	G	Z	Z	R	B	B	Z	V	B	M	J
Décalage	21	8	6	4	13	4	17	4	21	8	6	4	13	4	17	4	21	8	6	4	13	4	17
Lettre initiale	M	I	L	L	E	C	I	N	Q	C	E	N	T	V	I	N	G	T	T	R	O	I	S

11.



N. B. Les frises chronologiques ne comportent pas d'année 0, parce qu'il n'y en a pas, les années étant des intervalles. En revanche, si on parle d'axe du temps, on peut toujours placer 0

Problèmes d'isopérimétrie : éléments de correction.

A.1.a. Les hauteurs ont pour longueur $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ et ainsi $Q = \frac{(3 \times 4)^2}{4\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

A.1.b. De même, $Q = \frac{(3c)^2}{c^2\sqrt{3}/4} = 12\sqrt{3}$. Les facteurs c^2 du numérateur et du dénominateur se simplifient : le quotient ne dépend plus de c .

A.2. $Q = \frac{(4c)^2}{c^2} = 16$.

A.3. L'aire de chaque triangle équilatéral est $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ (calculé en A.1.b.). L'hexagone en comporte six donc son aire est égale à $\frac{6 \times c^2\sqrt{3}}{4}$, et son périmètre à $6c$ d'où $Q = \frac{4 \times 36c^2}{6c^2\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

B.1. L'un des triangles représentées a pour aire $\frac{cr}{2}$, l'aire du polygone est donc $\frac{ncr}{2}$.

Le périmètre est nc , on en déduit $Q = (nc)^2 \times \left(\frac{ncr}{2}\right)^{-1} = \frac{2n^2c^2}{ncr} = \frac{2nc}{r}$.

B.2. L'aire du disque inscrit est πr^2 , elle est inférieure à l'aire du polygone, c'est à dire $\frac{ncr}{2} \geq \pi r^2$, d'où $\frac{nc}{2} \geq \pi r$ en simplifiant par r .

On en déduit $\frac{nc}{r} \geq 2\pi$ et donc $Q = 2 \times \frac{nc}{r} \geq 4\pi$

C.1.a. D'après l'inégalité triangulaire, le côté de longueur $2d$ a une longueur inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, ce qui s'écrit $2d < 2c$, d'où le résultat.

L'inégalité est stricte car dans le cas d'égalité le triangle est d'aire nulle, mais alors le rapport isopérimétrique n'est pas défini (ce fait reste implicite dans tout le problème).

C.1.b. La hauteur associée à la base de longueur $2d$ a pour longueur $\sqrt{c^2 - d^2}$ donc le triangle a pour aire $d\sqrt{c^2 - d^2}$. Son périmètre est $2(d+c)$ d'où $Q = \frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2 - d^2}}$.

C.1.c. Avec $c=2d$, on trouve $Q = \frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2 - d^2}} = \frac{4(3d)^2}{d\sqrt{3d^2}} = \frac{12 \times 3d^2}{\sqrt{3}d^2} = 12\sqrt{3}$.

Remarque : avec $c=2d$ le triangle isocèle est équilatéral, et on retrouve heureusement la même valeur qu'en A.1.a.

C.1.d. On développe puis réduit le numérateur du membre de droite de l'égalité :

$$16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2) = 16(c^2-4cd+4d^2)(7d^2+8cd+c^2) = 16(c^4+4c^3d-21c^2d^2+4cd^3+28d^4).$$

D'autre part $Q^2 - (12\sqrt{3})^2 = \frac{4^2(c+d)^4 - 3 \cdot 4^2 d^2 (c^2 - d^2)}{d^2(c^2 - d^2)} = \frac{16}{d^2(c^2 - d^2)} ((c+d)^4 - 27d^2(c^2 - d^2))$ en

mettant sur le même dénominateur. On développe $((c+d)^4 - 27d^2(c^2 - d^2))$, on trouve

$$c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4 - 27c^2d^2 + 27d^4 = c^4 + 4c^3d - 21c^2d^2 + 4cd^3 + 28d^4.$$

Le résultat est établi.

C.1.e. On note D le membre de droite de l'égalité donnée. Tous les facteurs de D sont positifs pour toutes les valeurs des paramètres. Avec l'identité remarquable,

$$Q^2 - (12\sqrt{3})^2 = (Q - 12\sqrt{3})(Q + 12\sqrt{3}) = D \geq 0, \text{ d'où } Q - 12\sqrt{3} = \frac{D}{Q + 12\sqrt{3}} \geq 0, \text{ ce qui montre}$$

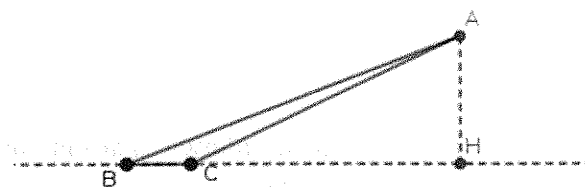
qu'on a $Q \geq 12\sqrt{3}$ pour tout triangle isocèle. Le rapport isopérimétrique de tout triangle équilatéral est donc toujours inférieur à celui de tout triangle isocèle.

C.2.a. La hauteur issue de C' a pour longueur la distance h entre (d) et (AB) pour tous ces triangles, et la longueur AB ne change pas. L'aire, qui vaut $h \frac{AB}{2}$, ne dépend pas de C' .

C.2.b. Considérons le symétrique B' de B par rapport à (d) . La distance AB' est le plus court chemin entre A et B' donc $AB' \leq AC + CB' = AC + CB$. Comme C' est sur $[AB']$,
 $AB' = AC' + C'B' = AC' + C'B \leq AC + CB$.

C.2.c. Le périmètre d'un triangle quelconque est supérieur à celui du triangle isocèle construit à la question précédente. Leurs aires étant égales, le rapport isopérimétrique d'un triangle quelconque est supérieur au rapport isopérimétrique du triangle isocèle qui lui est associé par la question précédente. D'après la question C.1.d, le rapport isopérimétrique de ce triangle isocèle est supérieur à $12\sqrt{3}$. On conclut en constatant que $12\sqrt{3} \geq 4\pi$.

C.3. Il s'agit de s'éloigner le plus possible du triangle isocèle. Pour simplifier, on peut rechercher un triangle ABC comme ci-dessous et d'aire 1, avec par exemple $BC = 1\text{cm}$ et pour hauteur $AH = 2\text{cm}$.



En notant $x = BH$, son périmètre est minoré par $2x$.
 Pour que le rapport isopérimétrique soit supérieur à 2020, il suffit donc que $(2x)^2 \geq 2020$, soit

$$x \geq \frac{\sqrt{2020}}{2} \approx 22,47.$$

Le triangle schématisé ci-dessus avec $BH = 22,5\text{cm}$ convient, et si l'on est assez soigneux on peut le tracer sur une feuille A4.

Eléments de correction

1°)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1

2°) U prend la valeur 0

n prend la valeur 0

Pour n allant de 0 à 50

Afficher n, U

Si $U < n+1$ alors U prend la valeur $U+n+1$

Sinon U prend la valeur $U - (n+1)$

Fin si

Fin Pour

3°) Par récurrence mais les élèves de première ne connaissent pas ce type de raisonnement

Pour $n=0$ c'est vrai.

Pour un n donné on suppose $0 \leq u_n \leq 2n$ on veut démontrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 2n+2$

Supposons $0 \leq u_n \leq n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1} il reçoit, en euros, $n+1$ donc il possède après u_{n+1} tel que $0 \leq n+1 \leq u_{n+1} \leq 2n+1 \leq 2n+2$.

Supposons $n+1 \leq u_n \leq 2n$. Lorsque le voyageur rencontre le mendiant M_{n+1} , c'est le voyageur qui donne, en euros, $n+1$ donc il lui reste après u_{n+1} tel que $0 \leq u_{n+1} \leq n-1 \leq 2n+2$.

Par récurrence on a donc : Pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 2n$

Sinon on peut raisonner comme suit.

Le cas le plus défavorable pour le voyageur est qu'il possède n euros lorsqu'il rencontre le n -ième mendiant. Dans ce cas, il donne tout son argent et il possède ensuite 0€.

On a donc pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n$

Le cas le plus favorable pour le voyageur est qu'il possède $(n-1)$ € lorsqu'il rencontre le n -ième mendiant. Dans ce cas, il possède ensuite $(2n-1)$ €.

On a donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n \leq 2n-1$

Comme $u_0 = 0$, on a bien pour tout entier naturel $n \geq 0$: $u_n \leq 2n$

4°)a) Supposons $1 \leq u_n \leq n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+1)$ il n'a pas assez d'argent, il reçoit $(n+1)$ € donc on a $u_{n+1} = u_n + n + 1$ avec

$$n+2 \leq u_n + n + 1 \leq 2n+1$$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+2)$, il aura suffisamment d'argent, donc il lui donnera $(n+2)$ €. Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} - (n+2) = u_n + n + 1 - n - 2 = u_n - 1$

4°)b)

Supposons $n+1 \leq u_n \leq 2n$, alors lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n+1)$ il a assez d'argent, il donne $(n+1)$ € donc on a $u_{n+1} = u_n - (n+1)$ avec $0 \leq u_n - n - 1 \leq n-1$

Puis lorsque le voyageur rencontre le mendiant numéro $(n + 2)$, il n'aura pas suffisamment d'argent, donc il recevra $(n + 2)€$.

Ainsi il possèdera $u_{n+2} = u_{n+1} + (n + 2) = u_n - n - 1 + n + 2 = u_n + 1$

5°)a)

Si $u_n = 0$ alors $u_{n+1} = n + 1$ et on se trouve dans le cas du 4°a) donc $u_{n+3} = (n + 1) - 1$ et on restera dans le cas du 4°a) jusqu'à ce qu'on retombe à 0.

Ainsi $u_{n+(2k+1)} = (n + 1) - k$ pour tout $0 \leq k \leq n + 1$.

Donc lorsque $k = n + 1$, on aura $u_{n+2(n+1)+1} = 0$ c'est-à-dire $u_{3n+3} = 0$

5°)b) On a $u_0 = 0$ donc $u_3 = 0$, puis $u_{3 \times 3+3} = u_{12} = 0$, puis $u_{3 \times 12+3} = u_{39} = 0$, puis $u_{3 \times 39+3} = u_{120} = 0$, puis $u_{3 \times 120+3} = u_{363} = 0$, puis $u_{3 \times 363+3} = u_{1092} = 0$

6°)a) $S_p = \sum_{k=1}^p 3^k = 3 + 3^2 + \dots + 3^p$ est la somme des termes (privée du premier terme) d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1.

On a donc $S_p = \frac{1-3^{p+1}}{1-3} - 1 = \frac{3^{p+1}-1-2}{2} = \frac{3^{p+1}-3}{2}$

6°)b) Les indices des termes qui valent 0 sont 0, 3, $3^2 + 3$, $3^3 + 3^2 + 3$, $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3$ etc... sommes qui s'expriment, en fonction de $p \geq 1$, comme dans la question 6°)a), et qui pour $p = 0$ donne bien pour indice 0 avec la même formule. Les termes de la suite (u_n) qui valent 0 sont bien ceux dont le rang est $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque

7°)a) $1092 = S_6 = 3 + 3^2 + \dots + 3^6$

7°)b) On a $u_{1092} = 0$ donc $U_{1093} = 1093$.

On obtient alors $u_{2019} = 1093 - \frac{2019-1093}{2} = 1093 - 463 = 630$.

Ainsi $u_{2020} = 2020 + 630 = 2650$. Après avoir rencontré le 2020^{ème} mendiant le voyageur possède 2650€

8°) Si l'on part de $U_{1093} = 1093$ on a pour tout entier k ; $0 \leq k \leq 1093$, $u_{1093+2k} = 1093 - k$.

Or $1093 - k = 2020$ est impossible avec k positif.

On a de plus $u_{1094} = 2187$ avec $u_{1094+2k} \geq 2187 > 2020$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 1094$.

On doit donc aller jusqu'au prochain terme nul de la suite.

On a $S_7 = 3279$ donc $u_{3279} = 0$, ainsi $u_{3280} = 3280$

Puis $u_{3280+2k} = 3280 - k$ pour tout k ; $0 \leq k \leq 3280$.

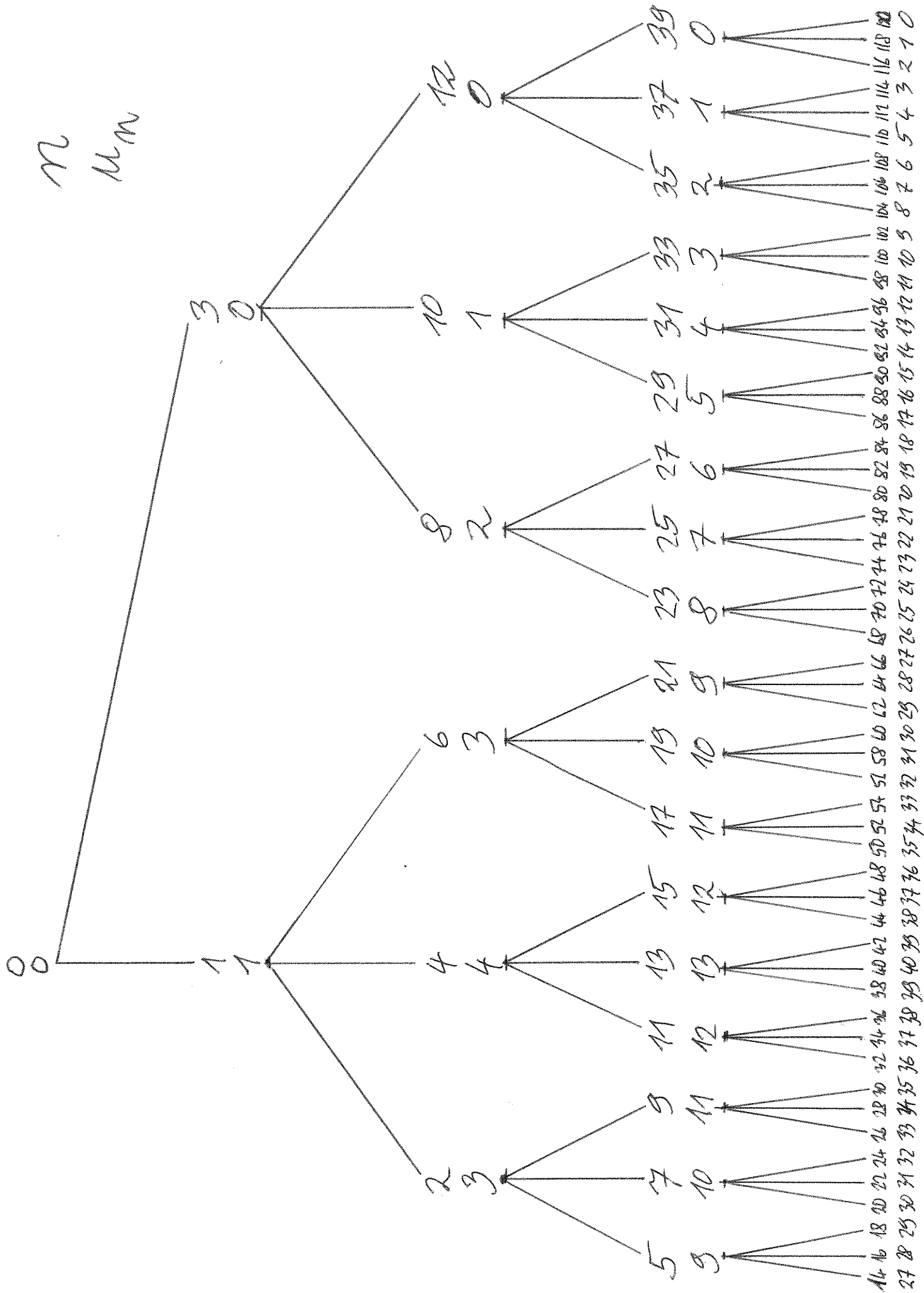
On cherche k tel que $3280 - k = 2020 \Leftrightarrow k = 1260$.

On obtient $u_{3280+2 \times 1260} = u_{5800} = 2020$

Remarque : Le prochain entier qui vérifie la même propriété est 25483 : $u_{25483} = 2020$.

A priori il y en a une infinité...

n
 n_m



Pour tous les entiers p et k avec $0 \leq p$
et $0 \leq k \leq (3^p - 1)/2$ nous avons :

Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k$, alors $u_n = (3^p - 1)/2 - k \leq n$.

Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k + 1$, alors $u_n = 3^p + k \geq n$.

Ces formules sont cohérentes, car pour $k = (3^p - 1)/2$,
 $(3^p - 1)/2 + 2k + 1 = (3^{p+1} - 1)/2 = 3^p + k$.

Elles sont vraies pour $p = 0$, puis suivent par récurrence :

Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k$, alors $n+1 = (3^p - 1)/2 + 2k + 1$ et
 $u_{n+1} = u_n + n+1 = (3^p - 1)/2 - k + (3^p - 1)/2 + 2k + 1$
 $= 3^p + k$.

Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k + 1$, alors $n+1 = (3^p - 1)/2 + 2(k+1)$ et
 $u_{n+1} = u_n - (n+1) = 3^p + k - (3^p - 1)/2 - 2(k+1)$
 $= (3^p - 1)/2 - (k+1)$.

Enfin, elles impliquent tout, notamment la partie 9 :

Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k$, alors $3n+1 = (3^{p+1} - 1)/2 + 2(3k)$,
donc $u_{3n+1} = (3^{p+1} - 1)/2 - 3k = 3u_n + 1$.

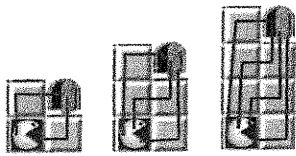
Si $n = (3^p - 1)/2 + 2k + 1$, alors $3n+1 = (3^{p+1} - 1)/2 + 2(3k+1) + 1$,
donc $u_{3n+1} = 3^{p+1} + 3k+1 = 3u_n + 1$.

Correction :

1)

a. Une grille $1 \times y$ étant constituée d'une seule colonne, donc un seul chemin (en ligne droite) d'où $C(1; y) = 1$.

b.



En traçant les différents chemins possibles on trouve facilement :

$$C(2; 2) = 2$$

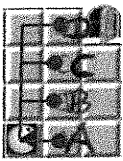
$$C(2; 3) = 3$$

$$C(2; 4) = 4$$

Lorsqu'on ajoute une ligne, on a les chemins précédents (ceux passant par la case sous la porte) plus le chemin longeant toute la 1^{ère} colonne donc le fait d'ajouter une ligne augmente le nombre de chemins de 1.

Autrement dit $C(2; y+1) = C(2; y) + 1$ et comme $C(2; 1) = 1$, on déduit de proche en proche que $C(2; y) = y$.

c.



Les différents chemins peuvent se dénombrer en 4 cas : ceux passant par A, B, C, D (voir dessin) puis rejoignant la porte, au nombre de $C(2; 4)$; $C(2; 3)$; $C(2; 2)$ et $C(2; 1)$ respectivement.

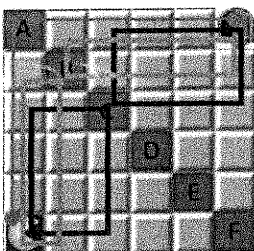
On déduit que $C(3; 4) = C(2; 4) + C(2; 3) + C(2; 2) + C(2; 1) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

En généralisant le raisonnement précédent on a : $C(3; y) = C(2; y) + C(2; y-1) + \dots + C(2; 1)$

Donc avec c. : $C(3; y) = y + (y-1) + \dots + 1 = \frac{y(y+1)}{2}$

d. La symétrie autour de la diagonale « personnage – porte » transforme un déplacement vers la droite en un déplacement vers le haut et inversement donc à tout chemin d'une grille $x \times y$ on peut associer un et un seul chemin solution d'une grille $y \times x$ et inversement, on en déduit donc que $C(y; x) = C(x; y)$.

2.



Les chemins entre le personnage et la porte sont constitués exclusivement de ceux contenant A ; B ; C ; D ; E ou F (chacun contient une seule de ces cases)

Les chemins contenant A sont ceux reliant le personnage et A, au nombre de $C(1; 6)$, suivi de ceux reliant A et la porte, au nombre de $C(6; 1)$ donc on a :

$C(1; 6) \times C(6; 1) = C^2(1; 6)$ chemins contenant A. Même résultat pour la lettre F.

De même il y a $C^2(2; 5)$ chemins contenant B ou E et $C^2(3; 4)$ chemins contenant C ou D.

Donc au total : $C(6; 6) = 2 [C^2(1; 6) + C^2(2; 5) + C^2(3; 4)]$ donc $C(6; 6) = 2 [1^2 + 5^2 + 10^2] = 2 \times 126 = 252$.

3.

a. Les chemins de la grille $x \times y$ se composent exclusivement de ceux issus de A, au nombre de $C(x-1; y)$ et de ceux issus de B, au nombre de $C(x; y-1)$ d'où au total : $C(x; y) = C(x-1; y) + C(x; y-1)$.

b.

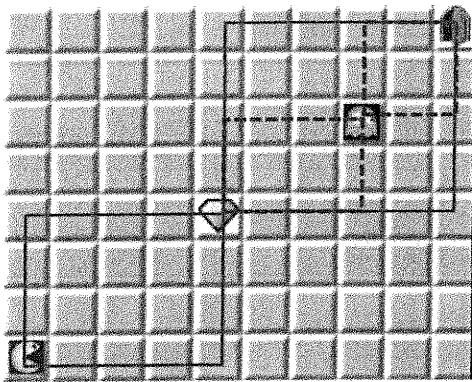
$C(x-1; y)$	$C(x; y)$
	$C(x; y-1)$

Cette relation permet de remplir de proche en proche les diagonales successives du tableau, on obtient

6	1	6	21	56	126	252
5	1	5	15	35	70	126
4	1	4	10	20	35	56
3	1	3	6	10	15	21
2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
y \ x	1	2	3	4	5	6

Remarque : on retrouve en dernière case le fait que $C(6; 6) = 252$

c.



Les chemins solutions passent d'abord par ceux entre le personnage et le diamant, au nombre de $C(5; 4) = 35$ (d'après le tableau précédent), associés à ceux entre le diamant et la porte, au nombre de $C(6; 5) = 126$ privés de ceux contenant le fantôme, au nombre de $C(4; 3) \times C(3; 3) = 10 \times 6 = 60$.

On en déduit le nombre de chemins solutions :

$$35 \times (126 - 60) = 35 \times 66 = 2310.$$

4.

a. Un chemin relie le personnage et la porte si et seulement si il est constitué de $(x-1)$ déplacements vers la droite associés à $(y-1)$ déplacements vers le haut. Le problème revient donc à placer $(x-1)$ lettres D parmi une liste de $(x-1) + (y-1) = x+y-2$ emplacements. D'après la propriété le nombre de chemins est donc :

$C(x; y) = \binom{x+y-2}{x-1}$ donc en appliquant la formule $\binom{n}{p}$ avec $n = x+y-2$ et $p = x-1$ (donc $n-p = y-1$) on trouve : $C(x; y) = \frac{x \times (x+1) \times \dots \times (x+y-2)}{1 \times 2 \times \dots \times (y-1)}$

b. Par application de cette formule $C(10; 8) = \frac{10 \times 11 \times \dots \times 16}{1 \times 2 \times \dots \times 7} = 11440$ d'où la proportion $\frac{2310}{11440} = 0,2019$ (soit 20,19%) : les chemins « gagnants » représentent environ 20,19 % des chemins reliant les cases de départ et d'arrivée dans la grille 10 x 8 (environ 1 chemin reliant des cases de départ et d'arrivée sur 5 est « gagnant »)

c.

$$N \leftarrow 1$$

$$D \leftarrow 1$$

k allant de 0 à $y-2$

$$N \leftarrow N \times (x+k)$$

$$D \leftarrow D \times (k+1)$$

$$C \leftarrow N/D$$