Éléments de solution

Exercice 1 (pour tous)

1., 2. et 3.

n	6	101	361	2 021
Les diviseurs de n	1; 2; 3; 6	1; 101	1; 19; 361	1, 43; 47; 2 021
$S(n)$	12	102	381	2 112
$2S(n)$	24	204	762	4 224
$(n+1)N(n)$	28	204	1 086	8 088

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.
b. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.
c. Application au cas $dq = n$.
d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d-1)(q-1) = 0$.
b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n. n est donc un nombre premier.
c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n, leur somme est $n+1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice 2 (spécialistes)

A. Quelques exemples

1. *a.* $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est $22-$décomposable.
On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :
$0 \times 10 + 7 = 7, 1 \times 10 + 8 = 18, 2 \times 10 + 5 = 25, 3 \times 10 + 4 = 34, 4 \times 10 + 3 = 43, 5 \times 10, 6 \times 10$ et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas $10-$décomposable.
b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est $100-$décomposable.
2. *a.* Dire que a est $1-$décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant $(0,0)$ et $(1,0)$ (et aussi $(0,1)$).
b. Dire que a est $2-$décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a-1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc 2, 1 et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.
3. *a.* $N^2 = N \times N + 0$ donne la réponse, N est $N-$décomposable.
b. $(N-1)^2 = (N-2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N-1)$ est $N-$décomposable.
c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres $N-$décomposables

1. *a.* Si k est $N-$décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k, on en déduit $k^2 \leq k(N+1)$, et $k \leq N + 1$.
Est-il possible que k soit égal à $N + 1$?

Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N+1)^2 = aN + (N+1-a)$, ou encore $N(N+1) = a(N-1)$, qui conduit à $a > N+1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.

b. Les entiers 3 −décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit N, N −décomposables (avec les couples $(0,0)$ et $(0,1)$).
La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non 4 −décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N), il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N-1)(p-q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. ***a.*** On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N-1) = 0$.
L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.
b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).
c. Essayons d'écrire différemment k et $N-1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$k^2 - k = 2^{2p-2}(2^p - 1)^2 - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^p + 1)(2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)(2^{2p} - 1)$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur $N-1$, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$, entier inférieur à k.

4. Calculons $(N-k)^2 - (N-k) = N(N-1) + k^2 + k - 2Nk + 2k = (N-1)(N - 2k + q)$
(la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N - k$ (c'est $N - k - (k - q)$).

5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k-1) = 0$. On a donc $k(k-1) = q(2k-1)$, qui assure que $k(k-1)$ est un multiple de $2k-1$. D'où on tire que $4k(k-1)$, qui est égal à $(2k-1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k-1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers N −décomposables sont inférieurs à N. D'après la question précédente, $\frac{N}{2}$ – un entier dans le cas où N est pair – ne l'est pas. Par ailleurs, si k est N −décomposable, $N - k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers N −décomposables par paire $\{k, N-k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N - 1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe un entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k-1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k-1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N-1, k = N$.

8. La condition $k(k-1) = q(N-1)$ Montre que les nombres N tels que k soit N −décomposable sont des diviseurs de $k(k-1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Il est nécessaire et suffisant que $0 \leq k \leq N$ et $N-1$ divise $k(k-1)$.

Exercice 3 (non spécialistes)

1. ***a.*** proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.
c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.

2. ***a.*** On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.
b. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

3. ***a.*** Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S, la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4\text{AB} + 4\text{SA}$.

Donc $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{30} + \frac{4}{20} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.

b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q}$.

Si $p < 4$ ou $q < 4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p} > 1$ ou $\frac{4}{q} > 1$ et, dans les deux cas, $4\text{AB} + 4\text{SA} > 1$. Donc $4\text{AB} + 4\text{SA}$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.

On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{1}{n}$.

Or, en réduisant au même dénominateur, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{4p+4q}{pq}$

Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q) = pq$.

Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.

Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.

L'égalité $4n(p+q) = pq$ est impossible si p et q sont impairs.

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles)

Partie I

1) *a*) En traçant la corde [AB] on compte C = 7 cordes, P = 12 parties et S = 4 intersections simples.

b) En ajoutant [MN] on trouve : C = 8 ; P = 19 ; S = 10.

c) En ajoutant [AN] on trouve : C = 9 ; P = 24 ; S = 14.

2) *a*) • $S' = S + k$:

Dans cet exercice les k intersections sur [AB] étant supposées simples elles sont toutes distinctes des S intersections précédentes (car autrement elles seraient intersection de 3 cordes, donc pas simples) donc elles s'ajoutent aux S intersections précédentes.

- Pour $P' = P + k + 1$:

Si k = 0, [AB] sépare une partie en 2, d'où l'ajout d'une partie donc $P' = P + 0 + 1$

Sinon soient $I_1, \dots, I_k$ les intersections simples sur [AB] : les k+1 segments $[AI_1]$; … ; $[I_{k-1}I_k]$; $[I_kB]$ séparent une partie en 2, d'où l'ajout de k + 1 parties dans le disque, donc $P' = P + k + 1$.

- Par ajout de la corde [AB] on a donc $P' = P + k + 1$; $S' = S + k$ et $C' = C + 1$ d'où :

$$P' - S' - C' = (P + k + 1) - (S + k) - (C + 1) = P - S - C.$$

b) Le résultat précédent montre que l'ajout d'une corde dans le disque ne change pas la valeur de $P - S - C$, laquelle reste donc constante quel que soit le nombre C de cordes, or pour C = 0 corde on a le disque dans son entier donc dans ce cas $P - S - C = 1 - 0 - 0 = 1$, donc quel que soit le nombre C de cordes on a : $P - S - C = 1$.

Partie II

1) *a*) On compte successivement : $P_1 = 1$; $P_2 = 2$; $P_3 = 4$; $P_4 = 8$; $P_5 = 16$ parties dans le disque.

b) Avec ces premiers exemples on observe que lorsqu'on ajoute un point sur le cercle, le nombre de parties double ce qui nous amène à conjecturer que $P_6 = 2\times P_5 = 32$ et $P_9 = P_6\times 2\times 2\times 2 = 256$.

2) Les cordes contenant A_k s'obtiennent en reliant A_k au (N-1) autres points, d'où (N-1) cordes.

Comme il y a N points, on déduit que l'on peut former N×(N-1) cordes en tout, mais ce faisant chaque corde sera comptée deux fois ([A_pA_q] et [A_qA_p]) d'où le nombre de cordes $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

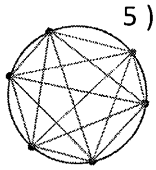
3) Les intersections étant simples, chaque intersection peut être associée de manière unique à 4 points que l'on pourra noter A, B , C , D, et inversement, par contre l'ordre des points A, B, C , D est indifférent pour y associer son intersection simple.

Comme il y a N points pour le choix de A, associés à (N-1) autres pour B, (N-2) autres pour C et (N-3) autres pour D, on a donc N(N-1)(N-2)(N-3) façons de choisir 4 points parmi N, mais par ce mode de calcul on compte (on distingue) les différents ordres de A, B, C, D possibles donc le nombre d'intersections simples est $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

Remarque : ce raisonnement suppose N ≥ 4 mais pour N = 1; 2; 3 on a $S_N = 0$ donc cette formule reste valable.

4) Avec la Partie I) 2) *b*) , on a $P_N = 1 + S_N + C_N$ et avec 2) et 3) précédents on déduit que :

$$P_N = 1+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}+\frac{N(N-1)}{2} = 1+\binom{N}{2}+\binom{N}{4}$$
$$= 1+\frac{N(N-1)[(N-2)(N-3)+12]}{24}$$
$$= 1+\frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}.$$



5) *a*) Avec cette formule on retrouve $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 8$, $P_5 = 16$ comme observé au 1) *a*), par contre on trouve $P_6 = 31$ (et non 32 contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) *b*) !!)

b) Avec un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice on obtient $P_{10} = 256$ (et non pour P_9 (= 16~~2~~3) contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) b) !!).

Moralité : conjecture ne vaut pas propriété, observation (même convaincante) ne vaut pas démonstration !

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles) :

Partie 1 :

1) $180^2 + 2021^2 = 4\ 116\ 841 = 2029^2$ donc (2021 ; 180 ; 2029) est pythagoricien.

$2021^2 + 1520^2 = 6\ 394\ 841$ et $2529^2 = 6\ 395\ 841$ donc (2021 ; 1520 ; 2529) n'est pas pythagoricien (attention au chiffre des milliers !)

2) *a*) $2021^2 + B^2 = C^2 \Leftrightarrow 2021^2 = C^2 - B^2 = (C - B)(C + B)$

b) Soient $X = C - B$ et $Y = C + B$ on a : $\underline{X < Y \text{ et } XY = 2021^2}$ (alors $C = (X+Y)/2$ et $B = C - X$),

Or $2021^2 = 43^2 \times 47^2 = 43 \times 43 \times 47 \times 47$ d'où les valeurs de X à envisager :

- $X = 1$ et $Y = 43 \times 43 \times 47 \times 47$: on trouve $C = (X+Y)/2 = 2\ 042\ 221$ et $B = C - X = 2\ 042\ 220$
- $X = 43$ et $Y = 43 \times 47 \times 47$: $C = 47\ 515$ et $B = 47\ 472$
- $X = 43^2$ et $Y = 47^2$: $C = 2029$ et $B = 180$
- $X = 47$ et $Y = 43 \times 43 \times 47$: $C = 43\ 475$ et $B = 43\ 428$

D'où les triplets solutions :

(2021 ; 180 ; 2029) ; (2021 ; 43 428 ; 43 475) ; (2021 ; 47 472 ; 47 515) et (2021 ; 2 042 220 ; 2 042 221).

Partie 2 :

1) *a*) On obtient encore une boite carrée inversible en remplaçant dans l'exemple chaque macaron par un carré de macarons 2 x 2 de même couleur, d'où 400 macarons (autre façon de raisonner : on peut aussi placer 4 boites de 100 macarons côte à côte en carré de 2 x 2, et rapprocher les carrés de macarons centraux de même couleur au centre de l'ensemble, on obtient bien alors une boite inversible)

On procède la même façon en partant de la boite inversible de 400 macarons pour obtenir une boite inversible de 1600 macarons.

b) En réitérant ce processus, on peut obtenir des boites inversibles contenant 100×4^n macarons, d'où une infinité de boites carrées inversibles.

Remarque : on peut aussi penser à remplacer chaque macaron par des carrés de macarons n x n de même couleur, d'où une infinité de boites inversibles du type $100 \times n^2$.

2) Les macarons noirs, gris et totaux formant tous des carrés dans la boite inversible on a $G = A^2$; $N = B^2$; $T = C^2$

Or $T = G + N$ donc $C^2 = A^2 + B^2$ d'où (A ; B ; C) triplet pythagoricien.

3) $T = G + N$ donc si $G = N$ alors $T = 2G$ d'où $C^2 = 2A^2$ donc $2 = C^2/A^2$ donc $\sqrt{2} = C/A$: impossible car $\sqrt{2}$ irrationnel.

4) *a*) G et N sont pairs car lorsqu'ils entourent le carré central, les macarons peuvent se décomposer en un nombre pair de lignes et un nombre pair de colonnes. On déduit que $T = G + N$ est aussi pair.

b) Soit $X = 2p+1$ impair, $X^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2P+ 1$ avec $P = 2p^2 + 2p$ entier, donc X^2 est impair.

c) On sait $G = A^2$ est pair, or si A était impair A^2 serait impair, donc A n'est pas impair, donc A est pair.

Même raisonnement pour B et C.

5) *a*) Soient $A = 2kxy$; $B = k(y^2 - x^2)$; $C = k(x^2 + y^2)$: A, B, C sont des entiers naturels non nuls avec :

$A^2 + B^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^2 - x^2)^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^4 + x^4 - 2y^2x^2) = k^2(y^4 + x^4 + 2y^2x^2) = k^2(y^2 + x^2)^2 = C^2$

Donc (A ; B ; C) pythagoricien.

b) Il s'agit de trouver les 3 plus petites valeurs de $T = C^2$ et donc de C.

Ayant montré que (A ; B ; C) est un triplet pythagoricien avec A, B, C tous pairs, on ordonne la recherche sur $C = k(x^2 + y^2)$ (selon la formule proposée) suivant les valeurs de k puis x puis y (avec $y > x$ et impairs)

$k = 1$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>10</u>**

$y = 5$ on obtient C = **<u>26</u>**

$y = 7$ on obtient C = **50** et on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures aux 3 précédentes.

$x = 3$; $y = 5$ on obtient C = **34**

$y = 7$: on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$x = 5$; $y = 7$: on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$k = 2$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>20</u>**

$y = 5$ on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26

$x = 3$; $y = 5$ on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

$k = 3$: $x = 1$; $y = 3$: C = 30

On s'arrête-là pour k car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

Donc C = 10 ; 20 ; 26 et avec A = $2kxy$ et B = $k(y^2 - x^2)$ on déduit les valeurs de A et de B correspondantes :

Pour C = 10 : k = 1 ; $x = 1$; $y = 3$ d'où A = 6 ; B = 8

Boite 10 x 10 : T=C^2= 100 macarons : G=A^2=36 d'une sorte et N= B^2 =64 de l'autre (donnée en exemple).

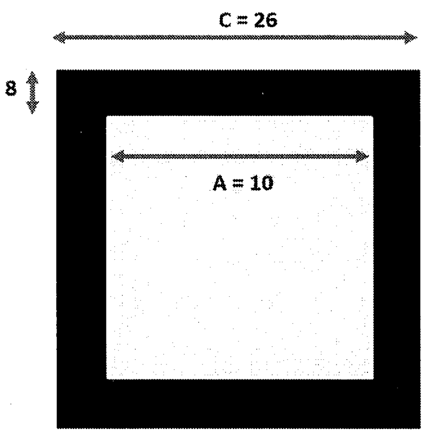
Pour C = 20 : k = 2 ; $x = 1$; $y = 3$ d'où A = 12 ; B = 16

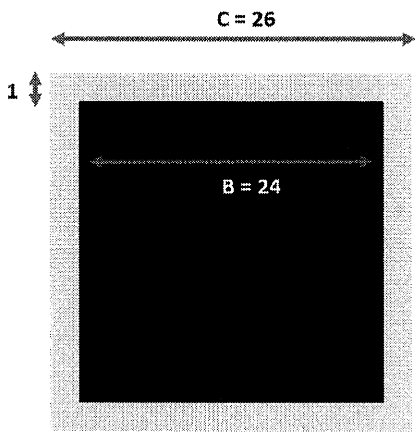
Boite 20 x 20 : T = 400 macarons : G = 144 d'une sorte et N = 256 de l'autre (trouvée au I) 1) a))

Pour C = 26 : k = 1 ; $x = 1$; $y = 5$ d'où A = 10 ; B = 24

Boite 26 x 26 : T = 676 macarons : G = 100 d'une sorte et N = 576 de l'autre.

Réciproquement : À strictement parler, il n'a pas été clairement prouvé précédemment que les conditions sur C sont suffisantes (seulement nécessaires), donc on doit vérifier que réciproquement cette dernière boite de 26 x 26 est bien inversible par exemple par un dessin de ce type (celles à 100 et 400 macarons ayant été trouvées dans II] 1) a), il n'est pas utile de le vérifier) :





Nombre de lignes dans le cadre noir : (26-10)/2 = 8, et on a bien 4 x 8 x 10 + 4 x 8^2 = 576 macarons noirs
Nombre de lignes dans le cadre gris : (26-24)/2 = 1, et on a bien 4 x 1 x 24 + 4 x 1 = 100 macarons gris
On a vérifié que, réciproquement, la boite 26 x 26 est bien inversible.