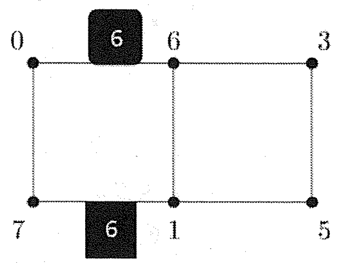
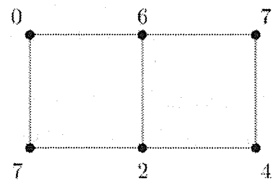
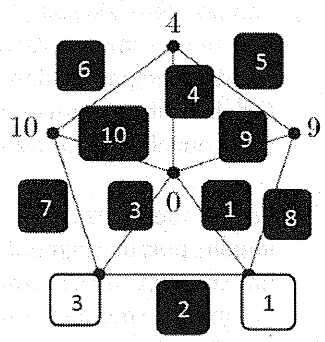
Exercice 1

Étiquetage gracieux d'une figure

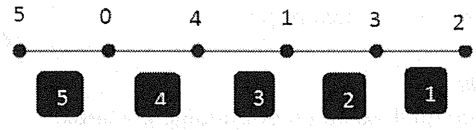
A. Des exemples

<table>
<tr><td>1.
</td><td></td><td rowspan="2">2.
</td></tr>
<tr><td>Etiquetage non gracieux (deux pondérations identiques)</td><td>Etiquetage non gracieux (étiquetage avec deux « 7 »)</td></tr>
</table>

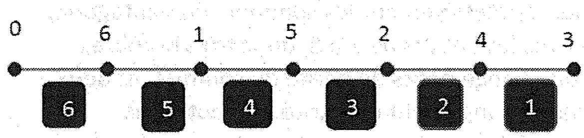
B. Cas des lignes

1.

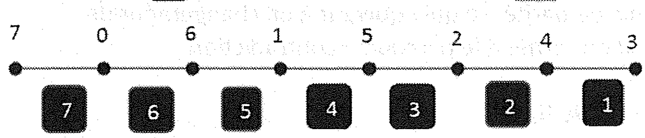
Étiquetage gracieux de L_5 :



Étiquetage gracieux de L_6 :

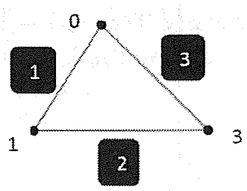
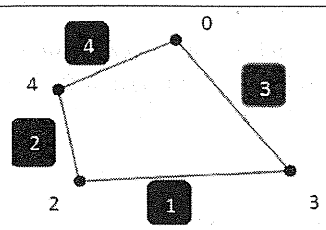
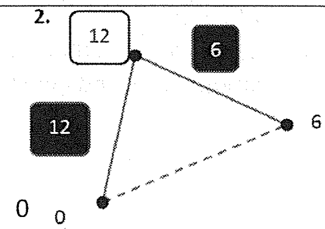


Étiquetage gracieux de L_7 :



2. En s'appuyant sur la réflexion menée pour les figures L_4 et L_6, on peut étiqueter la figure $L_{2\,022}$ en associant aux points allant de la gauche vers la droite la suite de nombres :
0, 2 022, 1, 2 021, 2, 2 020, 3, 2 019, ..., 1 009, 1 013, 1 010, 1012, 1011
Ce qui donne les pondérations successives, de la gauche vers la droite :
2 022, 2 021, 2 020, 2 019, 2 018, 2 017, 2 016, ..., 4, 3, 2, 1.

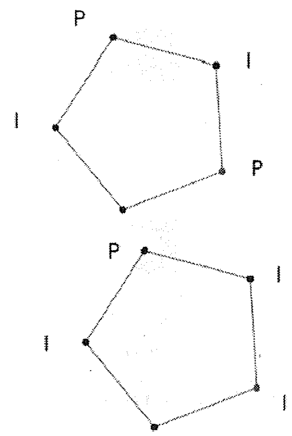
C. Cas des polygones

<table>
<tr><td>1.
</td><td></td><td>2.
</td></tr>
<tr><td>Étiquetage gracieux d'un triangle</td><td>Étiquetage gracieux d'un quadrilatère</td><td>Ajout à faire pour obtenir un étiquetage gracieux d'un polygone à 12 côtés.</td></tr>
</table>

3. Si les étiquettes des extrémités d'un segment sont ;
a. de parités différentes, alors la pondération du segment est impaire ;
b. de même parité, alors la pondération du segment est paire.
4. Un pentagone a cinq sommets pouvant être étiquetés par les nombres 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 (autant de nombres impairs que de nombres pairs, d'où une symétrie du problème par rapport à l'étiquetage P ou I) et reliés par cinq segments devant être pondérés par les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour que l'étiquetage soit gracieux. On doit donc avoir trois pondérations impaires (1, 3 et 5), ce qui nécessite trois alternances de nombres pairs et impairs pour les sommets associés. On a alors deux cas :

- on pondère à la suite trois segments par des nombres impairs et il reste un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de parités différentes.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée une nouvelle pondération impaire, ce qui en fait une de trop.

- on pondère à la suite deux segments pondérés par des nombres impairs puis un segment pondéré par un nombre pair. Il reste alors un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de même parité.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée soit deux nouvelles pondérations impaires soit deux nouvelles pondérations paires, ce qui ne convient pas.



Autre rédaction possible
Supposons par l'absurde qu'il existe un étiquetage gracieux.
Quand on parcourt successivement les sommets du pentagone, on voit sur les arêtes les entiers de 1 à 5, donc trois nombres impairs, donc trois changements de parité du sommet, et deux nombres pairs, sans changement de parité. En tout, trois changements de parité, ce qui équivaut à un changement de parité quand on termine le parcours : contradiction.

D. Une très grande figure
1. Le nombre de segments est le nombre de paires de points distincts, c'est-à-dire la moitié du nombre de couples soit $\frac{1}{2} \times 2\,022 \times 2\,021 = 1\,011 \times 2\,021 = 2\,043\,231$.
2. a. On cherche le nombre d'entiers impairs de l'ensemble $\{1,2,\ldots,2\,043\,231\}$ ce qui revient à chercher les entiers k tels que $0 \leq 2k+1 \leq 2\,043\,231$ soit $0 \leq k \leq 1\,021\,615$. On a donc 1 021 616 segments dont la pondération est un nombre impair.
b. Si p est le nombre de points étiquetés avec un nombre pair, alors le nombre de points étiquetés avec un nombre impair est $2\,022 - p$. Le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair est donc égal au nombre de paires de points étiquetés l'un avec un nombre pair et l'autre un nombre impair soit $p(2\,022 - p)$.
3. Si K_{2022} est muni d'un étiquetage gracieux alors il existe un entier p tel que $p(2\,022 - p) = 1\,021\,616$
L'équation du second degré $p^2 - 2\,022p + 1\,021\,616 = 0$, dont le discriminant est 2020, n'a pas de solution entière.

Exercice 2

Nombres sectionnables

Partie A

On remarque qu'un nombre N est sectionnable s'il existe un entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} = N$ ce qui s'écrit $n^2 + n - 2N = 0$ $21 \cdot 2 = 6 \cdot 7$; $136 \cdot 2 = 16 \cdot 17$; $1850 \cdot 2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 37$

1. a. L'équation $n^2 + n - 2 \times 21 = 0$ a pour discriminant 169 et pour solution entière positive $n = 6$
   L'équation $n^2 + n - 2 \times 136 = 0$ a pour discriminant 1 089 et pour solution entière positive $n = 16$
   21 et 136 sont donc bien sectionnables unitaires.
   b. L'équation $n^2 + n - 2 \times 1\,850 = 0$ a pour discriminant 14 801 qui n'est pas un carré parfait et donc n'a donc pas de solution entière. 1 850 n'est donc pas sectionnable.
   Remarque
   On peut aussi raisonner avec des inégalités. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(60) < 1850 < f(61)$.
2. Un entier a supérieur ou égal à 3 est un entier sectionnable unitaire si et seulement si l'équation $n^2 + n - 2a = 0$ admet au moins une solution entière positive.
   Cela signifie que son discriminant $1 + 8a$ est un carré parfait et qu'au moins une des solutions de l'équation, à savoir $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$, est un entier positif.
   Ceci équivaut à $\sqrt{1 + 8a}$ existe et est un entier tel que $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ soit un entier (l'autre solution est négative) soit $\sqrt{1 + 8a}$ existe et est un entier impair. $\Longleftrightarrow$ $1+8a$ est un carré (automatiquement impair)

Partie B $= 2+3+4$ $= 4+5+6$

1. $9 = 4 + 5$ et $15 = 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ donc 9 et 15 sont sectionnables.
   En revanche, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 < 16 < 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, $2 + 3 + 4 + 5 < 16 < 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, $3 + 4 + 5 < 16 < 3 + 4 + 5 + 6$, $4 + 5 + 6 < 16 < 4 + 5 + 6 + 7$, $5 + 6 < 16 < 5 + 6 + 7$, $6 + 7 < 16 < 6 + 7 + 8$, $7 + 8 < 16 < 7 + 8 + 9$ et $8 + 9 > 16$ donc 16 n'est pas sectionnable.
2. Si n est un entier impair supérieur ou égal à 3, alors il existe un entier k non nul tel que $n = 2k + 1$ soit $n = k + (k + 1)$ ce qui prouve que n est sectionnable.
3. $S = (q + 1) + (q + 2) + \dots + (q + k) = kq + (1 + 2 + 3 + \dots + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$
   Soit $2S = 2kq + k(k + 1) = k(k + 1 + 2q)$
4. Pour tout entier p, $p \geq 1$, si $N = 2^p$ alors $2N = 2^{p+1}$ est aussi une puissance de 2. Or, quelle que soit la parité de l'entier k, le nombre $k(k + 1 + 2q)$ est le produit d'un entier pair par un entier impair puisque $1 + 2q$ est un entier impair. Il ne peut donc être une puissance de 2.
5. **a.** $56 = 2^3 \times 7$ et $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(7 + 1 + 8) = 7(7 + 1 + 2 \times 4)$ et on peut écrire, en posant $k = 7$ et $q = 4$, $56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$.
   b. $2 \times 44 = 8 \times 11 = 8(8 + 1 + 2 \times 1)$ et $44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$.
   c. Soit n un nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2. Alors il existe un unique couple d'entiers (r, m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n = 2^r \times m$ et $2n = 2^{r+1} \times m$
   On considère deux cas :
   Si $m > 2^{r+1}$ alors $m \geq 2^{r+1} + 1$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = 2^{r+1}(2^{r+1} + 1 + 2q)$. On peut alors écrire $n = (q + 1) + (q + 2) + \dots + (q + 2^{r+1})$.
   Si $m < 2^{r+1}$ alors $m + 1 \leq 2^{r+1}$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = m(m + 1 + 2q)$. On peut alors écrire $n = (q + 1) + (q + 2) + \dots + (q + m)$.
6. En regroupant les résultats de la question 2 et de la question 5, l'ensemble des nombres sectionnables est constitué des nombres entiers impairs et des nombres positifs pairs qui ne sont pas une puissance de 2.

k et $k+1+2q$ sont ≥ 2 et de parité différente.

Partie C

1. $2 \times 13 = 26 = 2(2 + 1 + 2 \times 5)$ ce qui donne $13 = 6 + 7$ et il n'y a pas d'autres décompositions possibles car, 13 étant un nombre premier, il n'y a qu'un produit de deux entiers p et q supérieurs ou égaux à 2 et tels que $pq = 26$ et $q \geq p + 1$.
   En revanche, $50 = 5(5 + 1 + 2 \times 2) = 2(2 + 1 + 2 \times 11)$ ce qui donne $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ mais aussi $25 = 12 + 13$.
2. **a**. Si $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$ où $k \geqslant 3$
   Si k est pair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ et $n = k'(2q + (2k' + 1))$ et comme $k \geq 3$, $k' \geq 2$ et n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   Si k est impair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k' + 1$ et $n = kq + k(k' + 1) = k(q + k' + 1)$ et, comme $k \geq 3$, n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   b. Si n est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors il est impair et donc sectionnable d'après la partie B. De plus, en reprenant le résultat et les notations de la question précédente, la décomposition $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k)$ ne peut comporter que deux termes.
   On a alors $n = (q + 1) + (q + 2)$ où $q = \frac{n-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque n est un entier impair supérieur ou égal à 3 et n est bien uniquement sectionnable.

Remarque : On peut aussi raisonner directement comme cela a été fait pour l'entier 13. En effet, si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, $2 \times p$ est la seule décomposition de l'entier $2p$ en produit de deux nombres supérieurs ou égaux à 2 où l'un est strictement supérieur à l'autre.
Alors $2p = 2(2 + 1 + 2q)$ où $q = \frac{p-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque p est un entier impair supérieur ou égal à 3.

Le nombre de représentations sectionnables de $n \iff 2n = k(k+1+2q)$ est égal au nombre de diviseurs impairs > 1 de n.

Exercice 3

Trois

1. Le tableau suivant montre les étapes suivies pour parvenir à chacun des entiers compris entre 1 et 12 .

1	Diviser par 2, diviser par 2
2	Diviser par 2
3	Diviser par 2, multiplier par 3, diviser par 2
4	Ne rien faire
5	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
6	Diviser par 2, multiplier par 3
7	Multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
8	Diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
9	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3
10	Diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
11	Multiplier par 3, diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 puis ajouter 2
12	Multiplier par 3.

2. On peut atteindre 8. On multiplie par 3, cela donne 24. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 74. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 224. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 674. On multiplie par 3, et on obtient 2 022

3.

a. Montrons que tous les multiples non nuls de 3 sont atteignables. Le plus petit d'entre eux, m est tel qu'il existe un entier non nul a tel que $m = 3a$. Mais cela signifie qu'il existe une opération autorisée permettant de passer de a à m. Dire que m n'est pas atteignable, c'est dire que a ne l'est pas, mais a est plus petit que m. Contradiction.
b. Si $m - 2$ est un multiple de 3, alors il existe un entier b tel que $m - 2 = 3b$ et donc $m = 3b + 2$, d'où on voit que m peut être atteint à partir de b, qui est plus petit que m. Contradiction.
c. Si $m - 1$ est un multiple de 3, il existe un entier c tel que $m - 1 = 3c$ et donc $m = 3c + 1$. Mais alors $2m = 3 \times 2c + 2$ et donc $2m$ peut être atteint à partir de $2c$, et m à partir de $2m$. Nouvelle contradiction.
d. De trois entiers consécutifs, un est un multiple de 3. Donc l'hypothèse de départ est fausse : il n'y a pas d'entier non nul non atteignable.

Proposition de correction :

Partie 1 :

1) Justifier que les deux quadrilatères AM_1BN_1 et AM_2BN_2 tracés ci-dessous sont des rectangles pythagoriciens (échelle non respectée) :

(65 ; 60 ; 25) = 5 × (13 ; 12 ; 5) et (65 ; 52 ; 39) = 13 × (5 ; 4 ; 3) avec (5 ; 4 ; 3) et (13 ; 12 ; 5) deux rectangles pythagoriciens, donc AM_1BN_1 et AM_2BN_2 sont deux rectangles pythagoriciens.

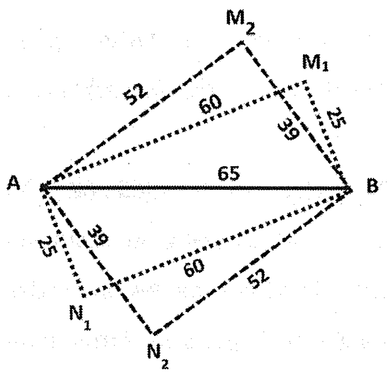
2) On a placé ci-dessous les deux rectangles pythagoriciens précédents en y faisant correspondre les points A et B.

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent à un même cercle de diamètre 65.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu, donc les trois diagonales des deux rectangles sont de même longueur AB = 65 et concourent au milieu O de [AB].

On en déduit que A, B, N_1, M_1, N_2, M_2 appartiennent au cercle de centre O et de diamètre AB = 65.

3) *a*) Calculer les longueurs M_1N_2 et M_1M_2 de la figure précédente.



Dans AM_1BN_2 (inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) d'après le théorème de Ptolémée :

$65 \times M_1N_2 = 60 \times 52 + 25 \times 39 = 4095$

Donc $M_1N_2 = 4095/65 = 63$

Dans AM_2M_1B (inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) d'après le théorème de Ptolémée :

$65 \times M_1M_2 + 52 \times 25 = 60 \times 39$

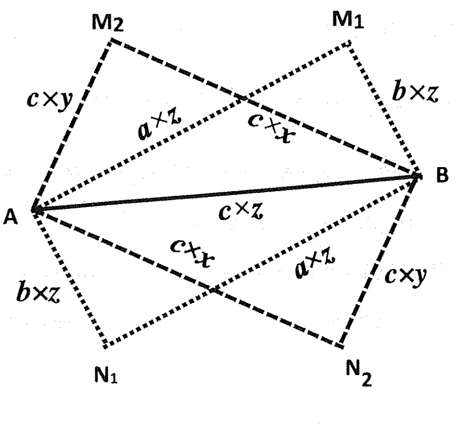
Donc $M_1M_2 = (2340 - 1300)/65 = 16$.

b) Déduire que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

D'après 2), les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont sur un cercle de diamètre 65 (entier). Par symétrie par rapport au milieu O de [AB] (centre du cercle contenant les 6 points) :

$N_1M_2 = M_1N_2 = 63$ et $N_1N_2 = M_1M_2 = 16$ ce qui nous assure que toutes les longueurs entre les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont toutes entières, donc A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

Partie 2 :



Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 de la figure ci-dessous forment une 6-Fraternité de diamètre $c \times z$.

On a $(cz ; bz ; az) = z(a ; b ; c)$ et $(cz ; cy ; cx) = c(z ; y ; x)$ donc ce sont deux rectangles pythagoriciens non semblables et les A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent donc au cercle de diamètre de longueur cz (entier)

On a des quadrilatères inscrits dans le cercle de diamètre [AB] donc d'après le théorème de Ptolémée :

- Dans AM_1BN_2:
  $cz \times M_1N_2 = az \times cy + bz \times cx = cz(ay + bx)$ donc $M_1N_2 = ay + bx$, une longueur entière.
- Dans AM_2M_1B :
  $cz \times M_1M_2 + cy \times bz = az \times cx$ donc $cz \times M_1M_2 = az \times cx - cy \times bz = cz(ax - by)$
  donc $M_1M_2 = ax - by$: entier naturel car le théorème de Ptolémée nous donne une longueur donc positive, et non nul car les rectangles (c ; b ; a) et (z ; y ; x) n'étant pas semblables les longueurs (b ; a) et (x ; y) ne sont pas proportionnelles donc $ax - by \neq 0$ (et donc M_1 et M_2 sont bien distincts)
- Enfin par symétrie par rapport au milieu O de [AB] (centre du cercle contenant les 6 points) :
  $N_1M_2 = M_1N_2$ et $N_1N_2 = M_1M_2$ donc entiers naturels non nuls d'après ce qui précède.

On en déduit que toutes les longueurs entre les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont entières, donc on a bien une 6-Fraternité de diamètre AB = cz (entier)

Partie 3 :

1) Justifier qu'il existe une 8-Fraternité de diamètre 5 × 13 × 17 = 1 105

Soient (c, b, a) et (z ; y ; x) deux rectangles pythagoriciens. On a montré dans la Partie 2 qu'en plaçant les rectangles pythagoriciens $c(z ; y ; x) = (cz ; cy ; cx)$ et $z(c, b, a) = (cz ; bz ; az)$ le long d'une diagonale commune, on obtient une 6-Fraternité de diamètre cz.

Donc les rectangles pythagoriciens 13(5 ; 4 ; 3) = (65 ; 52 ; 39) et 5(13 ; 12 ; 5) = (65 ; 60 ; 25) forme une 6-Fraternité de diamètre 65 (déjà vu en Partie 1), et associés au rectangle pythagoricien (17 ; 15 ; 8), non semblable aux deux précédents, on déduit que les rectangles 17(65 ; 52 ; 39) ; 17(65 ; 60 ; 25) et 65(17 ; 15 ; 8) sont 3 rectangles pythagoriciens forment un ensemble de 8 points (les points A et B, et les 6 autres sommets M_i et N_i) sur le cercle de diamètre AB = 17 x 65 = 1105, tels que les distances entre 2 points sont toutes entières, on a donc bien une 8-Fraternité de diamètre 1105.

2) Justifier qu'il existe une 2022-Fraternité de diamètre entier.

Avec le raisonnement précédent, en considérant k rectangles pythagoriciens non semblables (ensemble non fini) notés (c_1 ; b_1 ; a_1) ... (c_k ; b_k ; a_k), on peut obtenir, par multiplications successives une Fraternité de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times ... \times c_k$ et contenant 2 (points A et B) + k × 2 (sommets M_i ; N_i) = 2k + 2 points. Une 2022-fraternité sera donc obtenue avec k = 1010 rectangles pythagoriciens non semblables, de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times ... \times c_{1010}$

3) Justifier que pour tout entier naturel non nul N, il existe une N-Fraternité de diamètre entier.

Si N est pair, il suffit de prendre k rectangles pythagoriciens non semblables tels que N = 2 + 2k (k = (N-2)/2), pour obtenir une N-fraternité de diamètre entier c_1 x c_2 x ... x c_k

Si N est impair, on prend k tel que 2k + 2 = N+1 (k = (N-1)/2), on a alors une (N+1)-Fraternité, et il suffit d'enlever un de ces points (par exemple A) pour obtenir une N-Fraternité, de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times ... \times c_k$ CQFD.

Complément :

La durée de l'épreuve nous a amené à faire admettre qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens non semblables.

Voici, à titre indicatif, et pour entraînement pour les futurs candidats aux olympiades, une méthode sous forme d'exercice permettant de démontrer cette propriété :

1) On montre qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) où x et n sont des entiers naturels non nuls :

Démonstration :

(n+1 ; n ; x) rectangle pythagoricien signifie $n^2 + x^2 = (n + 1)^2$

Ce qui équivaut, après développement, à $x^2 = 2n + 1$ donc à x^2 impair (et distinct de 1 car n est non nul), ce qui équivaut à x impair distincts de 1.

En posant $x = 2p + 1$ (p entier naturel non nul), il vient $x^2 = 4p^2 + 4p + 1$,

Et $x^2 = 2n + 1$ équivaut à $n = 2p^2 + 2p$ (et donc $n+1 = 2p^2 + 2p + 1$)

Les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) sont donc ceux du type :

($2p^2 + 2p + 1$; $2p^2 + 2p$; $2p + 1$) avec p entier naturel non nul...donc en nombre infini (car les $2p^2 + 2p + 1$ obtenus seront tous distincts pour chaque valeur de p)

(Remarque : les premiers rectangles pythagoriciens que l'on obtient sont p = 1 : (5 ; 4 ; 3) ; p = 2 : (13 ; 12 ; 5) ; p = 3 : (25 ; 24 ; 7), assez classiques, que certains candidats auront peut-être déjà observés dans leur scolarité)

2) Les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) ne sont pas semblables deux à deux.

Démonstration :

En effet, soit deux rectangles Pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) et (k+1 ; k ; y), en les supposant semblables, de rapport a (a entier naturel non nul), les différences des longueurs (n+1) – n et (k+1) – k devraient donc aussi suivre ce rapport a, or (n+1) – n = 1 et (k+1) – k = 1 donc il ne peut y avoir que a = 1 comme rapport correspondant, donc ils sont identiques !

Il n'existe donc pas deux rectangles *semblables* du type (n+1 ; n ; x) qui soient distincts, donc les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) ne sont pas semblables deux à deux.

3) Conclusion :

On a montré qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) et que ces derniers ne sont pas semblables deux à deux, donc il existe une infinité de rectangles pythagoriciens non semblables deux à deux. (Remarque : cela ne signifie pas que toutes les familles infinies de rectangles pythagoriciens non semblables deux à deux sont nécessairement de la forme (n+1 ; n ; x), on a simplement extrait une famille particulière répondant à la question)

Multiplications avec un même résultat.

Partie I : Etude de cas.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (aucune justification n'est demandée) :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(x)	2	2	3	2	4	2	4	3	4

2) Montrer que « M(x) = 2 » équivaut à « x est nombre premier »

M(x) = 2, donc x s'écrit uniquement $1 \times x$ et $x \times 1$ ce qui équivaut au fait que 1 et x sont les seuls diviseurs de x donc, par définition, que x est premier.

3) Montrer que M(x) est impair si et seulement si x est un carré parfait.

Si $x = ab$, le couple (a ; b) se retrouve par symétrie (b ; a) car $x = ba$ dans le comptage de M(x), donc par pair, sauf si a = b où ces symétriques sont identiques, donc M(x) est impair si et seulement si il existe un couple (a ; a) donc si et seulement si il existe a tel que $x = axa = a^2$ donc si et seulement si x est un carré parfait.

4) Justifier que M(x) est égal au nombre de diviseurs de x.

Chaque diviseur a de x peut être associé de façon unique au couple (a ; b) du produit $x = a \times b$, et inversement, donc le nombre total M(x) de produits égaux à x est bien égal au nombre de diviseurs de x.

Partie II : Etude des premiers antécédents de M :

1) Montrer que M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

Les nombres premiers ($p_1, \dots, p_n$) étant fixés, cela revient à dénombrer les puissances ($b_1 ; \dots ; b_n$) que l'on peut leur associer avec $0 \leq b_i \leq a_i$ or $0 \leq b_1 \leq a_1$ donc on a $(a_1 + 1)$ possibilités pour b_1, associées à $(a_2 + 1)$ possibilités pour b_2 ; … ; associées à $(a_n + 1)$ possibilités pour b_n d'où $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$ possibilités pour les diviseurs de x.
On a vu en I) 4) que M(x) correspond au nombre de diviseurs de x donc M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

2) Déterminer M(2022), M(2^{2022}), M(20^{22}).

$2022 = 2^1 \times 3^1 \times 307^1$ donc d'après ce qui précède : M(2022) = $2 \times 2 \times 2 = 8$

2 étant un nombre premier, M(2^{2022}) = 2022 + 1 = 2023.

$20^{22} = (2^2 \times 5)^{22} = 2^{44} \times 5^{22}$ donc M(20^{22}) = $45 \times 23 = 1\,035$

3) *a*) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 3 sont ceux s'écrivant sous la forme p^2 avec p entier premiers.

M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$ (avec $a_i + 1 \geq 2$) : 3 étant un nombre premier M(x) = 3 si et seulement si n = 1 et $a_1 = 2$ donc les x solutions sont les p^2 avec p premier.

b) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 4 sont ceux s'écrivant sous la forme p^3 ou $p \times q$ avec p et q entiers premiers distincts.

M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$ (avec $a_i + 1 \geq 2$) : pour M(x) = 4 les seuls produits possibles sont n = 1 et $a_1 = 3$ ou bien n = 2 et $a_1 = a_2 = 1$ et donc les x possibles sont les p^3 et les $p^1q^1 = pq$, p et q premiers distincts.

c) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 5 sont ceux s'écrivant sous la forme p^4 où p désigne un nombre premier.

5 étant un nombre premier, M(x) = 5 donne n = 1 et $a_1 = 4$ donc les solutions sont les p^4 avec p premier.

Partie III : Etude d'antécédents.

1) a) Trouver un entier naturel x tel que $M(x) = 2022$

Il suffit de prendre $x = p^{2021}$ avec p premier, par exemple 2^{2021}

b) Montrer que pour tout entier naturel y non nul, il existe au moins un entier naturel x tel que $M(x) = y$

Par analogie au a), on peut prendre par exemple $x = 2^{y-1}$ ($y \geq 2$) car alors $M(2^{y-1}) = (y - 1) + 1 = y$

2) On considère l'ensemble des entiers naturels $x = p_1^{a1}\, p_2^{a2} \ldots p_n^{an}$ tels que $M(x) = 6000$

a) Ecrire 6000 sous la forme de produit de nombres premiers et déduire que $1 \leq n \leq 8$.

On a $6000 = 2^4 3^1 5^3$

Il s'agit donc de trouver $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ (donc $1 + ai \geq 2$) tels que $M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1) = 6000 = 2^4 3^1 5^3$

Or 6000 se décompose au maximum en le produit de 8 facteurs ≥ 2 : $6000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$ donc

$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1)$ comporte au plus 8 facteurs donc $n \leq 8$ (et par définition de x, $n \geq 1$)

b) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 1$

Si $n = 1$ on a $x = p_1^{a1}$ et $M(x) = a_1 + 1$ donc $M(x) = 6000 \Leftrightarrow a_1 = 5999$ d'où $x = p_1^{5999}$ donc le plus entier est $x = 2^{5999}$

c) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 8$

Il faut trouver le plus petit $x = p_1^{a1} \ldots p_8^{a8}$ tel que $M(x) = 6000$.

$M(x) = (1 + a_1) \ldots (1 + a_8)$ étant indépendant des valeurs des nombres premiers $p_1, \ldots, p_8$, pour minimiser x il faut que ces nombres premiers soient les plus petits possibles, donc 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Et $M(x) = 6000$ donne $(1 + a_1) \ldots (1 + a_8) = 6000$ or $6000 = 2^4 3^1 5^3$ donc 6000 ne peut donc s'écrire que comme le produit des 8 facteurs ≥ 2 suivants : 2 2 2 2 3 5 5 5,

On en déduit que les $(1 + a_i)$ sont les 2 2 2 2 3 5 5 5 (Rappel : $1 + ai \geq 2$ car $a_i \geq 1$)

donc les a_i sont les entiers 1 1 1 1 2 4 4 4 (avec une répartition qu'il reste à déterminer)

Enfin pour minimiser x, plus p_i est grand, plus sa puissance a_i associée doit être petite.

D'où $x = 2^4 \times 3^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$

$x = 1\,833\,242\,410\,000$ (si la calculatrice n'affiche tous les chiffres de x, on peut aussi observer que $2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4 = 10\,000$ il suffit alors de calculer le produit restant $3^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 183\,324\,241$)

d) Etude des antécédents avec $n = 2$ (donc $x = p^a q^b$ avec p et q entiers premiers distincts, et a et b entiers ≥ 1)

- Préciser deux nombres entiers distincts x de la forme $2^a 3^b$ (a et b entiers ≥ 1) tels que $M(x) = 6000$

Il suffit de déterminer deux couples (a ; b) distincts tel que $M(x) = (a+1)(b+1) = 6000$

Par exemple $6000 = 2 \times 3000$ donc $a = 1$ et $b = 2999$ d'où $x = 2^1 \times 3^{2999}$ ou aussi $a = 2999$ et $b = 1$ d'où $x = 2^{2999} \times 3^1$

- Trouver le nombre d'entier x de la forme $2^a 3^b$ avec a et b entiers naturels non nuls), tels que $M(x) = 6000$

*$M(x) = (a + 1)(b + 1)$, il s'agit donc de trouver le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que $(a + 1)(b + 1) = 6000$ or le nombre de (A ; B) d'entiers naturels **≥ 1** tels que $AB = 6000$, est égal, par définition de M, à $M(6000) = M(2^4 3^1 5^3) = 5 \times 2 \times 4 = 40$, or ici $A = a + 1 \geq 2$ et $B = b + 1 \geq 2$* donc il faut soustraire aux 40 cas (A ; B) précédents les cas où $A = 1$ (alors $B = 6000$) et où $B = 1$ (alors $A = 6000$), *on aura donc $40 - 2 = 38$ solutions.*

3) Généralisation :

a) Soient y entier ≥ 2 et p et q deux nombres premiers distincts :

Justifier que le nombre d'entiers x de la forme p^aq^b, avec a et b entiers ≥ 1, tels que M(x) = y, est égal à M(y) – 2.

On généralise le raisonnement précédent avec y au lieu de 6000 et p et q au lieu de 2 et 3 :

M(x) = (a + 1)(b + 1), il s'agit donc de trouver le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que (a + 1)(b + 1) = y or, par définition de M, le nombre de (A ; B) d'entiers naturels ≥ 1 tels que AB = y est égal à M(y), or ici on a : A = a + 1 ≥ 2 et B = b + 1 ≥ 2 donc il faut soustraire aux cas (A ; B) précédents les cas où A = 1 (alors B = y) et où B = 1 (alors A = y), *on a donc M(y) – 2 solutions x possibles.*

b) Préciser le nombre d'entiers de la forme 5^a7^b , avec a et b entiers ≥ 1, tels que M(x) = 12^{34}

Par application du a) précédent, ces entiers sont au nombre de M(12^{34}) – 2 or $12^{34} = (2^2 x3)^{34} = 2^{68}$ x 3^{34}, donc M(12^{34}) – 2 = 69 x 35 – 2 = 2 413 entiers x de la forme 5^a7^b tel que M(x) = 12^{34}