CORRIGE METROPOLE

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

PLUS FORT !

1. ***a.*** $[8,1,\mathbf{7},6,5,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]$ est une autre liste de longueur 8 et de score 3.

b. Les listes de longueurs 3 sont $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$, $[1,\mathbf{3},2]$, $[2,1,\mathbf{3}]$, $[2,\mathbf{3},1]$, $[3,1,\mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et les scores associés sont respectivement $2,1,1,1,1,0$.

2.

```
def score(n):
  '''renvoie le score d'une liste L de longueur n'''
  S=0
  for k in range(n-1):
    if L[k+1]>L[k]:
      S=S+1
  return S
```

3. Le score est un nombre positif ou nul et le joueur marque 0 point avec la liste $[n, n-1, \dots, 2,1]$.
Dans le meilleur des cas, toutes les cartes sont dans l'ordre croissant et la liste $[1,\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}]$ apporte le nombre maximal de points qui est $n-1$.

4. ***a.*** La liste $[1,\mathbf{2},..,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n},n-1,..,k+1]$ a pour score k et est de longueur n donc il existe au moins une liste de longueur n et de score k.

b. La liste $[n-1,..,k+1,1,\mathbf{2},..,\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}]$ est différente de la précédente et donne aussi k points donc, pour tout k entre 1 et $n-2$, on peut trouver deux listes de longueur n et de score k.

5. La première liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score 0 (les nombres doivent tous être rangés dans l'ordre décroissant. De même, la deuxième liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score $n-1$, donc $L_n(0) = L_n(n-1) = 1$.

6. ***a.*** En appliquant le résultat de la question précédente à $n = 3$, $L_3(0) = L_3(2) = 1$.
Les listes de longueurs 3 sont $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$, $[1,\mathbf{3},2]$, $[2,1,\mathbf{3}]$, $[2,\mathbf{3},1]$, $[3,1,\mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et on en déduit $L_3(1) = 4$.
On remarque que $[3,1,\mathbf{2}]$ rapporte 1 point. Parmi les 4 possibilités d'insertion du 4, les listes dont le score est toujours 1 sont $[\mathbf{4},3,1,2]$ et $[3,1,\mathbf{4},2]$.

b. La liste $[3,2,1]$ a pour score 0. On obtient une liste ayant encore le score 0 uniquement en insérant le n°4 au début, ce qui donne la liste $[\mathbf{4},3,2,1]$.

c. Toute liste de longueur 4 et de score 1 ne peut être obtenue que par insertion du n°4 dans une liste de longueur 3 et de score 0 ou 1. En effet, insérer 4 à la liste $[1,\mathbf{2},\mathbf{3}]$ donnera une liste de score 2 au moins.
Pour chaque liste de longueur 3 et score 1, il y a deux possibilités d'insertion du n°4, ce qui fait 2 $L_3(1)$ telles listes possibles.
À cela on ajoute les 3 possibilités obtenues à partir de la liste de longueur 3 et score 0, ce qui ajoute 3 $L_3(0)$ listes possibles.
On obtient donc bien $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

d. On construit une liste de longueur $n+1$ et score 1 à partir d'une liste de longueur n et score 0 ou 1, en insérant le n° $n+1$ judicieusement.
Remarquons d'abord que la position 1 ne rapporte pas de point.

Dans une liste de longueur n et score 1, on peut insérer le n° $n+1$ soit au tout début (en position 1), soit juste avant le numéro marquant l'unique point (position au moins 2). Ces deux positions sont distinctes, et ce sont les seules possibles, ce qui fait $2\,L_n(1)$ listes de ce type.
Dans une liste de longueur n et de score 0, on peut insérer le n° $n+1$ n'importe où sauf au tout début, la liste obtenue rapportera bien 1 point. Il y a donc n positions possibles pour ce numéro $n+1$, ce qui fait $n\,L_n(0)$ listes de ce type.
Enfin, insérer $n+1$ à une liste de longueur n et de score supérieur ou égal à 2 donnera une liste de score supérieur ou égal à 2 : en effet, si on l'insère en queue, cela augmentera le score d'une unité, et sinon, cela conservera le score initial. ou dans une descente
On trouve donc bien $L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0)$.

e. On a $L_{n+1}(k) = (k+1)L_n(k) + (n+1-k)L_n(k-1)$. En effet :

- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score k, la nouvelle liste a encore un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite en position 1, ou juste avant un numéro qui marquait un point, ce qui fait $k+1$ possibilités.
- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score $k-1$, la nouvelle liste a un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite dans l'une des positions non évoquées ci-dessus, ce qui donne $n+1-k$ possibilités.
- Enfin, comme précédemment, insérer $n+1$ à une liste de score strictement inférieur à $k-1$, ou strictement supérieur à k, ne conduira jamais à une nouvelle liste de score k.

f. On obtient, grâce aux questions précédentes :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=3$	1	4	1		
$n=4$	1	11	11	1	
$n=5$	1	26	66	26	1

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

UNE DESCENTE INFINIE

Partie 1.

1. $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.
2. $c \geq 0$ donc r_1 et r_2 sont de même signe. $b \leq 0$ est négatif donc la somme de r_1 et r_2 est positive. On en déduit donc que r_1 et r_2 sont positifs.

Partie 2.

1. ***a.*** Comme (x_1, x_2, x_3) solution de l'équation (1), on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$.
   Or $\alpha > 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
   Ainsi $|x_1||x_2||x_3| = |x_1 x_2 x_3| = x_1 x_2 x_3$ et $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
   b. Si (x_1, x_2, x_3) est triplet d'entiers relatifs différent de (0,0,0) solution de l'équation (1), alors d'après la question précédente, $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ solution triplet d'entiers naturels de l'équation (1) différent de (0,0,0).
2. Par commutativité du produit et de la somme, le triplet (x_2, x_1, x_3) est alors aussi solution de l'équation (E).
3. Si l'équation (E) admet une solution (x_2, x_1, x_3) différente de (0,0,0), d'après la question 1b., on obtient un triplet de nombres entiers naturels différents de (0,0,0) et solution de (E). Puis, d'après la question 2. (~~en~~ et en la généralisant à d'autres permutations du triplet), on obtient une solution (x_1, x_2, x_3) différente du triplet (0,0,0) telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3.

1. On sait déjà que $x_1 \geq 0$. Si $x_1 = 0$, alors le membre de droite de l'égalité est nul et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, les x_i sont donc tous nuls et la seule solution est le triplet (0,0,0), ce qui est contraire à l'hypothèse.
2.
   a. (x_1, x_2, y) est solution si et seulement si $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ c'est-à-dire y est racine de Q.
   b. x_3 est une racine de Q.
   c. On écrit $Q(x_2) = (x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2) = (2x_2^2 + x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)$ d'où le résultat.
   On sait que x_1, x_2 sont des entiers non nuls donc supérieurs ou égaux à 1, d'où $3 - \alpha x_1 \cancel{x_2} \leq 3 - \alpha < 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $(3 - \alpha x_1 \cancel{x_2}) x_2^2 < 0$ et on a $0 < x_1 \leq x_2$ donc ~~donc~~ $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.
   D'où en sommant $Q(x_2) < 0$.
   d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2$ et $0 < x_1 \leq x_2$ donc $Q(0) > 0$.
   e. $Q(x_2) < 0$ donc la fonction polynôme du second degré Q change de signe sur **R**. On en déduit que l'équation $Q(x) = 0$ possède exactement deux solutions distinctes réelles. On connaît x_3. On note y l'autre solution.
   La fonction polynôme Q est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur. Donc, comme $Q(x_2) < 0$, x_2 est entre ces racines (strictement). Comme $x_2 \leq x_3$, on en déduit que $y < x_2 < x_3$.
   On sait que $Q(0) > 0$, donc 0 est à l'extérieur des racines donc soit inférieur strictement à y soit strictement supérieur à x_3. Mais comme $0 < x_2$, on en conclut que $0 < y < x_2 < x_3$.
   f. D'après la partie **1.**, $y + x_3 = \alpha x_1 x_2$ qui est un entier comme produit d'entiers. Comme x_3 est un entier, y est un entier. Il est naturel d'après la question **e.**.
3. En réitérant ce procédé sur le triplet (x_1, x_2, y) (réordonné dans l'ordre croissant) au lieu de (x_1, x_2, x_3), on obtient un triplet d'entiers distincts de (0,0,0) dont le max a encore strictement décru .
   On obtient ainsi une suite strictement décroissante d'entier naturels y_n, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas de triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
4. Par l'absurde, s'il existait un triplet d'entiers relatifs (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E), alors, d'après la question **3.** de la partie 2, il existerait un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3).différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ce qui est impossible d'après la question précédente.
5. On généralise le raisonnement en considérant d'abord le polynôme $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} x + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, en montrant que $Q(x_{n-1}) = (n - \alpha x_1 \dots x_{n-2}) x_{n-1}^2 + (x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 - (n-2) x_{n-1}^2)$ d'où on déduit $Q(x_{n-1}) < 0$ alors qu'on a $Q(0) > 0$.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Si a et b sont tous les deux pairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l$
d'où $a + b = 2(k + l)$ et $a + b$ est pair.
Si a et b sont tous les deux impairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$
d'où $a + b = 2(k + l + 1)$ et $a + b$ est pair.
Réciproquement, si a est pair et b est impair, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l + 1$
d'où $a + b = 2(k + l) + 1$ et $a + b$ est impair. Le raisonnement est le même si a est impair et b est pair.
Le nombre $a + b$ est donc bien pair si et seulement si a et b sont de même parité.

Codage d'un message

2. ***a.*** Le quadruplet (1,0,0,1) code le message $M = 1 + 8 = 9$.
b. $10 = 2 + 8$ donc le quadruplet (0,1,0,1) code le message $M = 10$ et $15 = 1 + 2 + 4 + 8$ donc le quadruplet (1,1,1,1) code le message $M = 15$.
c. On ne peut trouve r de code pour représenter $M = 20$ car le plus grand message est celui obtenu avec le quadruplet (1,1,1,1)soit 15.
d. Les différents messages possibles sont : 0, 1, 2, 3, ..., 15 soit tous les entiers de 0 à 15.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs.

3. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$ qui est pair donc $y = 0$.
b. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 + 1 = 3$, qui est impair. On devrait donc avoir $y = 1$. Le code a donc été corrompu.
c. Dans le cas où un seul bit est faux, on peut détecter l'altération puisque si l'on change la parité d'un seul terme d'une somme, on change la parité de la somme mais on ne peut la localiser parmi les trois termes de la somme.
Dans le cas où deux bits sont faux, on ne pourra pas détecter l'altération d'après la question préliminaire.
4. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 0 + 0 = 1$ qui est impair donc $y_1 = 1$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 0 + 1 = 1$, qui est impair donc $y_2 = 1$ et $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair donc $y_3 = 0$.
b. Pour le quadruplet (1,1,0,1,0,0,1), on a bien $y_1 = 0$ car $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 0 = 2$ qui est pair et $y_2 = 0$ car $x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair mais $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair et on devrait donc avoir $y_3 = 0$ ce qui n'est pas le cas. On est donc certain d'une altération de transmission pour l'heptuplet (1,1,0,1,0,0,1).
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où un seul des bits d'information est erroné, nécessairement deux* des sommes $x_1 + x_2 + x_3$, $x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 + x_4$ ont une mauvaise parité par rapport aux y_1, y_2, y_3. Le bit d'information à changer est celui qui ne figure pas dans la somme ayant la bonne parité. *ou trois si x_3 est faux
Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où exactement deux des quatre bits d'information sont erronés, leur somme a pour autant la bonne parité (puisqu'on ne change pas la parité d'une somme de deux entiers si on change la parité de ces deux entiers). Les deux bits d'information à changer sont donc ceux qui figurent ensemble dans les sommes ayant la bonne parité mais seuls dans chacune des autres sommes.

PROPOSITION DE SOLUTION

Partie 1 : Premiers exemples.

1) Les longueurs données s'obtiennent par application du théorème de Pythagore.

2) On a : $17 = 1^2 + 4^2$; $32 = 4^2 + 4^2$ et $45 = 3^2 + 6^2$ donc $\sqrt{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{32} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{45} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3) Soit $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ on a : $N = x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ d'où $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ (ou bien par symétrie des triangles $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$)

Partie 2 : Longueurs deux fois traçables.

1) On a $9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$ et $7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ donc $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2) $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$ donc $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ donc $\sqrt{50} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ donc $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3) *a*) $N_2 = 5 \times 2^2 + 5 = 25$ donc $\sqrt{N_2} = \sqrt{25}$, deux fois traçable d'après 2) précédent.

b) $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (k^2 - 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix}$

$(2k - 1)^2 + (k + 2)^2 = (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 + 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$

Il a été démontré que $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$, il reste donc à vérifier les conditions de la définition :

D'une part $(2k + 1) \geq (k - 2)$ car $k \geq -3$ car $k \geq 3$

et $(2k - 1) \geq (k + 2)$ car $k \geq 3$

Et d'autre part $\begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$ car $(2k + 1) \neq (2k - 1)$ (ou aussi $(k - 2) \neq (k + 2)$)

Donc $\sqrt{N_k}$ est bien deux fois traçable.

c) La réciproque est fausse car $\sqrt{65}$ est deux fois traçable alors que 65 n'est pas de la forme $5k^2 + 5$ car (N_k) est croissante avec $N_2 = 25$; $N_3 = 50$ et $N_4 = 85$ (ou $65 = 5k^2 + 5$ donne $k = \sqrt{12}$ qui n'est pas un entier naturel).

Partie 3 : Etude des longueurs plusieurs fois traçables

1) Un nombre premier N a pour uniques diviseurs 1 et N, il s'écrit donc uniquement sous la forme des produits $1 \times N$ ou $N \times 1$. Si N est deux fois traçable, d'après la propriété admise, $N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ donc $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ et $c^2 + d^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ donc N s'écrit comme un produit de deux facteurs distincts de 1, donc N n'est pas premier.

2) Pour déterminer les deux plus petits entiers N non multiples de 5 de la forme $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ il faut (et il suffit) qu'aucun des facteurs $(a^2 + b^2)$ et $(c^2 + d^2)$ ne soit divisible par 5.

Par commutativité du produit, on peut supposer que $(a^2 + b^2) \leq (c^2 + d^2)$ (pour ordonner la recherche) puis considérer les plus petites valeurs de $(a^2 + b^2)$ successives telles que $a > b \geq 1$:

(a ; b) = (2 ; 1) : $a^2 + b^2 = 5$, à exclure car multiple de 5

(a ; b) = (3 ; 1) : $a^2 + b^2 = 10$, à exclure car multiple de 5

(a ; b) = (3 ; 2) : $a^2 + b^2 = 13$ et on associe ensuite le plus petit facteur pour ($c^2 + d^2$) possible :

(c ; d) = (3 ; 2) : $c^2 + d^2 = 13$ d'où $N = 13 \times 13 = 169$

ou bien (c ; d) = (4 ; 1) : $c^2 + d^2 = 17$ d'où $N = 13 \times 17 = 221$.

(a ; b) = (4 ; 1) : $a^2 + b^2 = 17$: recherche terminée car alors $c^2 + d^2 \geq 17$ donc N supérieur aux deux précédents.

Pour 169 : Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9+4 \\ |6-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ |0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9-4 \\ 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pour 221 : Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12+2 \\ |3-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ |-5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12-2 \\ 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3) Il s'agit de vérifier s'il existe a, b, c, d tels que 2023 = ($a^2 + b^2$)($c^2 + d^2$) avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

Par commutativité du produit, on peut supposer pour ordonner la recherche que ($a^2 + b^2$) ≤ ($c^2 + d^2$).

Or $2023 = 7 \times 17 \times 17$.

Comme $a^2 + b^2 \neq 1$ (car $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$), les seules valeurs possibles pour ($a^2 + b^2$) sont donc :

($a^2 + b^2$) = 7 : non (autrement dit $\sqrt{7}$ n'est pas traçable)

($a^2 + b^2$) = 17 d'où (a ; b) = (4 ; 1)

et alors on doit avoir ($c^2 + d^2$) = $7 \times 17 = 119$ (autrement dit vérifions si $\sqrt{119}$ est traçable)

En calculant ($119 - d^2$) avec $1 \leq d \leq 7$, on n'obtient pas de carré d'entier (Et si $d \geq 8$, avec $c^2 + d^2 = 119$, on obtient $c^2 < d^2$: à exclure car par définition c > d) donc ($c^2 + d^2$) ≠ 119.

Conclusion : $\sqrt{2023}$ n'est pas deux fois traçable.

4) 325 = 5 x 65 avec $\sqrt{5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc $5 = 2^2 + 1^2$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ donc $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$

Il vient, en appliquant la formule donnée avec :

- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16+1 \\ |2-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ |-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{17} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16-1 \\ 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14+4 \\ |8-7| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ |1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14-4 \\ 8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$

Donc $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix}$

Partie 4 : Application à une configuration dans l'espace.

1) Dans OBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $OC^2 = OB^2 + BC^2$

Et dans OAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2$

Donc $OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2) *a)* Si $z \leq 5$ alors $x \leq y \leq z \leq 5$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$;

et si $z > 9$ alors $x^2 + y^2 + z^2 > 9^2 = 81$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$

donc $6 \leq z \leq 9$

b) Soit P(x , y , z) : P appartient à S si et seulement si $OP^2 = 9^2$ donc si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

On cherche donc les P(x ; y ; z) de coordonnées entières tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

➔ *Supposons d'abord x , y , z entiers naturels avec $x \leq y \leq z$* (pour ordonner la recherche).

On a donc $6 \leq z \leq 9$:

$z = 6$: $x^2 + y^2 + 36 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 45$ d'où (x ; y) = (3 ; 6) d'où le point P_6 = (3 ; 6 ; 6)

$z = 7$: $x^2 + y^2 + 49 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 32$ d'où (x ; y) = (4 ; 4) d'où le point P_7 = (4 ; 4 ; 7)

$z = 8$: $x^2 + y^2 + 64 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 17$ d'où (x ; y) = (1 ; 4) d'où le point P_8 = (1 ; 4 ; 8)

$z = 9$: $x^2 + y^2 + 81 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 0$ d'où (x ; y) = (0 ; 0) d'où le point P_9 = (0 ; 0 ; 9)

(Remarque : on retrouve les différentes valeurs de (x ; y) obtenues en Partie 1)

➔ *Par permutation de (x , y , z) on obtient : 3 points avec P_6 ; 3 points avec P_7 ; 6 points avec P_8 et 3 points avec P_9 soit exactement 3 + 3 + 6 + 3 = 15 points de coordonnées entières <u>naturelles</u> situés sur la sphère S.*

➔ *Pour obtenir les coordonnées pouvant être négatives il suffit d'effectuer des changements de signes et donc d'appliquer aux coordonnées de <u>chacun</u> des points associées à P_6, P_7, P_8 précédents un seul signe « - » (d'où 3 autres points) ou deux signes « - » (d'où 3 autres points) ou trois signes « - » (d'où 1 autre point) soit 7 <u>autres</u> points en tout de coordonnées entières relatives obtenus à partir de chacun des 12 points associés à P_6, P_7, P_8.*

Quant aux points associés à P_9, comme 0 = - 0, on ne peut qu'ajouter un signe « - » à la valeur 9 pour obtenir un nouveau point par changement de signe, donc 1 point supplémentaire pour chacun des 3 points associés à P_9.

Le nombre total de points à coordonnées entières appartenant à S est donc égal à $12 \times 8 + 3 \times 2 = 102$.

CQFD

Démonstration de : ① $\sqrt{N}$ deux fois traçable

$\Leftrightarrow$ ② $\exists\,(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c} ; \boldsymbol{d})$ entiers naturels tels que $N = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ avec $\boldsymbol{a > b \geq 1}$ et $\boldsymbol{c > d \geq 1}$

Et alors on a $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$.

$\boxed{① \Rightarrow ② :}$

① : $\sqrt{N}$ deux fois traçable $\exists$ (A ; B ; C ; D) entiers naturels tels que $N = A^2+B^2 = C^2+D^2$ avec $A \neq C$ et de D.

② sera démontrée en 3 propositions :

<u>Proposition 1 :</u> (A ; B ; C ; D) peuvent être ordonnés de telle façon que $A > C$ avec A et C de même parité

$D > B$ avec B et D de même parité

- On peut supposer que A est le plus grand des 4 entiers A, B, C, D et comme $A \neq C$ et $A \neq D$ on a $A > C$ et $A > D$,
  Alors $B^2 = N - A^2 < N - D^2 = C^2$
  $< N - C^2 = D^2$ donc $B < C$ et $B < D$.
- $N = A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ donc
  - Si N est impair, A et B ainsi que C et D doivent être de parités différentes donc, quitte à inverser C et D (inversion compatible avec les relations d'ordre du précédent point), on peut supposer que A et C ainsi que B et D sont de même parité.
  - Et si N est pair, A et B doivent être de même parité, ainsi que C et D.
    Or si $A = 0\,[\,2\,]$ et $B = 0\,[\,2\,]$ alors $A^2 + B^2 = 0\,[\,4\,]$; et si $C = 1\,[\,2\,]$ et $D = 1\,[\,2\,]$ alors $C^2 + D^2 = 2\,[\,4\,]$
    Donc $A^2 + B^2 \neq C^2 + D^2$.
    Donc si N est pair alors nécessairement A, B, C , D sont tous de même parité (donc en particulier A, C et B, D)

<u>Proposition 2 :</u> $\exists$ (a ; b ; c ; d) entiers naturels tels que D = ad + bc ; C = ac – bd ; B = ad − bc ; A = ac + bd

$A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ donc $A^2 - C^2 = D^2 - B^2$ donc $(A - C)(A + C) = (D - B)(D + B)$

Avec (A – C) ; (A + C) ; (D – B) ; (D + B) entiers naturels pairs non nuls (d'après la proposition 1)

Posons alors PGCD(A + C ; D – B) = 2a et PGCD(A − C ; D + B) = 2b

$$\frac{A-C}{D-B} = \frac{D+B}{A+C} = \frac{b}{a}$$

On a A + C = 2aq ; D – B = 2ar où q et r sont 1[ers] entre eux (et non nuls)

A − C = 2bd ; D + B = 2bc où c et d sont 1[ers] entre eux (et non nuls)

$$\frac{A+C}{D-B} = \frac{D+B}{A-C} = \frac{c}{d}$$

Alors (A – C)(A + C) = 4abdq = (D – B)(D + B) = 4abcr

Donc dq = cr donc d | cr avec d et c 1[ers] entre eux donc (Gauss) : d | r donc r = kd (k entier naturel non nul)

q | cr avec q et r 1[ers] entre eux donc (Gauss) : q | c donc c = k'q (k' entier naturel non nul)

Donc dq = cr = k'q × kd donc kk' = 1 donc k = k' = 1 d'où r = d et q = c

Il vient alors que : A + C = 2ac ; D – B = 2ad ; A − C = 2bd ; D + B = 2bc ;

D'où : A = (2ac + 2bd)/2 = ac + bd ; C = (2ac – 2bd)/2 = ac – bd ;

D = (2ad + 2bc)/2 = ad + bc ; B = (2bc – 2ad)/2 = bc – ad

<u>Proposition 3 :</u> $N = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

Avec la proposition 2 : $N = A^2 + B^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = C^2 + D^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

De plus

- $A \neq C$ donc $A^2 - C^2 = (A + C)(A - C) = 4abcd \neq 0$ donc a, b, c, d non nuls
- $A \neq D$ donc $A - D = (ac + bd) - (ad + bc) = (a - b)(c - d) \neq 0$ donc $a \neq b$ et $c \neq d$.
- Comme $N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, on peut inverser a avec b et c avec d et donc supposer $a \geq b$ et $c \geq d$

Donc $\exists\,(a ; b ; c ; d)$ entiers naturels tels que $N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ ②

$\boxed{② \Rightarrow ①:}$

② : $\exists$ (a ; b ; c ; d) entiers naturels tels que $N = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

On a : $N = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac + bd)^2 + |ad - bc|^2$

Avec (ac – bd) ; (ad + bc) ; (ac + bd) ; | ad – bc | entiers naturels (ac – bd est positif car $a > b > 0$ et $c > d > 0$)

Donc $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$

Pour conclure que $\sqrt{N}$ est deux fois traçable il reste à montrer que $(ac + bd) \neq (ac - bd)$ et $(ac + bd) \neq (ad + bc)$:

- $(ac + bd) - (ac - bd) = 2bd \neq 0$ car $b \neq 0$ et $d \neq 0$ donc $(ac + bd) \neq (ac - bd)$
- $(ac + bd) - (ad + bc) = (a - b)(c - d) \neq 0$ car $a \neq b$ et $c \neq d$ donc $(ac + bd) \neq (ad + bc)$

Donc $\sqrt{N}$ est deux fois traçable et $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$ ①

CQFD.

Soit $r(n)$ le nombre de points à coordonnées entières sur le cercle de centre $O = (0;0)$ et de rayon $\sqrt{n}$, c'est-à-dire $r(n) = |\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n = x^2 + y^2\}|$. Si $n = 2^k \cdot n_3 \cdot n_1$, où n_3 regroupe tous les diviseurs premiers de n valant $3 \pmod 4$ et n_1 ceux valant $1 \pmod 4$, alors

$$r(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n_3 \text{ n'est pas un carré ;} \\ 4d(n_1), & \text{si } n_3 \text{ est un carré et} \end{cases}$$

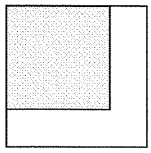
$d(n_1)$ est le nombre de diviseurs positifs de n_1.

En particulier, $\sqrt{n}$ est deux fois traçable si et seulement si n_3 est un carré et $d(n_1) \geq 2$.

Paver avec des rectangles d'aspect unique — Correction

Partie I

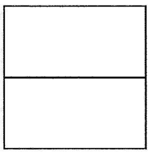
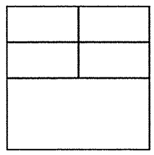
Question 1. Un 1-pavage est un pavage d'un carré C composé lui-même de carrés. L'un de ces carrés, que l'on appellera A, est positionné dans le coin en haut à gauche de C car ce coin doit être couvert par le pavage. Supposons que le pavage est de taille supérieure ou égale à 2 : le carré A ne peut pas recouvrir à lui seul le carré C et l'on a donc la figure à droite où A est en gris. L'espace restant, en blanc, ne peut être recouvert avec un seul carré. Ainsi l'effectif du 1-pavage est au moins égale à 3.



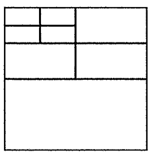
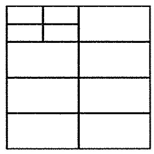
Question 2. Pour tout entier naturel non nul n on peut paver un carré de côté n par $n \times n$ carrés de côté 1 ce qui constitue un 1-pavage d'effectif n^2.

Partie II

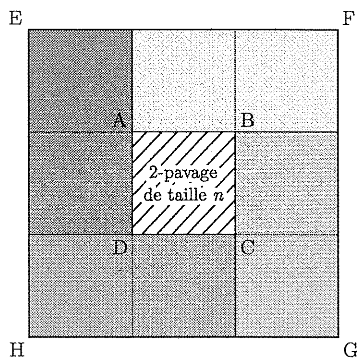
Question 3. a) Un pavage d'effectif 1 d'un carré est constitué d'une seule pièce qui doit donc recouvrir tout le carré. L'aspect de cette seule pièce est ainsi nécessairement égal à 1. Il n'existe donc pas de 2-pavage d'effectif 1.

b) 2-pavage d'effectif 2 :  2-pavage d'effectif 5 : 

c) En coupant un rectangle R en deux exactement au milieu de sa longueur et de même dans le sens de la largeur, on remplace ce rectangle par quatre rectangles semblables au premier. Leur aspect est donc égal à celui de R. Si n est l'effectif d'un 2-pavage donné, en effectuant cette opération sur n'importe lequel des rectangles du pavage on obtient un nouveau pavage dont tous les rectangles ont encore un aspect égal à 2, et d'effectif $n - 1 + 4 = n + 3$. C'est ce que l'on a fait dans la question précédente.

d) 2-pavage d'effectif 8 :  2-pavage d'effectif 11 : 

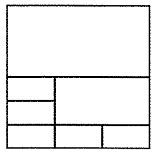
Question 4. a) Voir la figure ci-contre. Chacun des quatre rectangles grisés ajoutés est bien d'aspect 2.



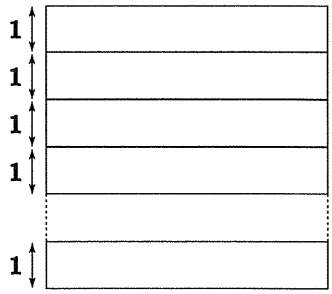
b) En appliquant la méthode de la question précédente au 2-pavage de taille 2 précédemment trouvé on obtient un 2-pavage d'effectif 6. On obtient un 2-pavage d'effectif 9 en appliquant la même technique au 2-pavage d'effectif 5 de la question 3.b) ou en appliquant la question 3.c) au 2-pavage d'effectif 6 tout juste obtenu. Quant au 2-pavage d'effectif 10 on peut l'obtenir en utilisant la question 4.a) à ce même 2-pavage d'effectif 6.

Question 5. On sait déjà qu'il existe des 2-pavages d'effectifs 8, 9 et 10 . En appliquant la question 3.c), on obtient alors des 2-pavages d'effectifs $8 + 3 = 11$, $9 + 3 = 12$ et $10 + 3 = 13$. En répétant l'opération on obtient successivement tous les effectifs trois par trois. Plus précisément on peut démontrer par récurrence la propriété P_n : « il existe un 2-pavage d'effectif k pour tout $8 \leqslant k \leqslant n$ » car P_{10} est vraie tandis que si P_n est vraie pour $n \geqslant 10$ alors il existe un 2-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant 8$ donc par la question 3.c) on construit un 2-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$.

Question 6. Voir la figure à droite.

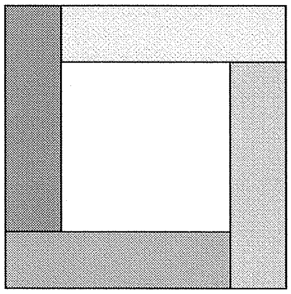


Partie III



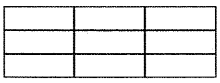
Question 7. a) Découper un carré de côté A en A bandes de largeur A et de hauteur 1 comme sur le dessin ci-contre constitue bien un A-pavage d'effectif A.

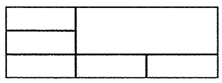
b) Comme expliqué dans la question 3.c) découper un rectangle en quatre rectangles semblables conserve l'aspect et appliquer cette opération à un rectangle quelconque du A-pavage précédent donne un A-pavage d'effectif $A + 3$.



c) Dans un carré de côté $A + 1$, disposer quatre rectangles de dimensions $A \times 1$ comme indiqué ci-contre laisse au centre un espace vide carré de côté $A - 1$. Il suffit de remplir ce vide avec le A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) en adaptant sa taille avec une homothétie de rapport $1 - 1/A$.

d) En découpant un rectangle d'aspect A en trois parts égales dans chaque direction, on obtient la figure ci-dessous à gauche constituée de 9 rectangles de même aspect car ils sont semblables au rectangle d'origine. En fusionnant quatre de ces petits rectangles on obtient un rectangle toujours de même aspect comme dans la figure ci-dessous à droite qui contient 6 rectangles.



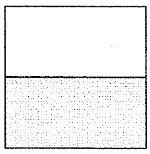


On applique cette technique à un rectangle quelconque du A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) pour obtenir un A-pavage d'effectif $A - 1 + 6 = A + 5$.

Question 8. On démontre par récurrence l'assertion P_n : « il existe un A-pavage d'effectif k pour tout $A + 3 \leqslant k \leqslant n$ » pour tout $n \geqslant A + 5$. P_{A+5} est vraie d'après la question 1. Si P_n est vraie pour $n \geqslant A + 5$ alors il existe un A-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant A + 3$ auquel on applique la technique de la question 7.b) pour construire un A-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$ ce qui démontre P_{n+1}.

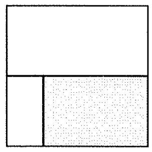
Partie IV

Question 9. S'il existe un A-pavage d'effectif n, par homothétie on peut supposer sans perte de généralité qu'il pave un carré de côté A. Chaque rectangle de ce pavage est de longueur au plus A pour tenir dans le carré, donc de largeur au plus 1 puisqu'on connait son aspect : ainsi son aire est au plus A. L'aire totale recouverte par le pavage est donc au maximum nA. Puisque le pavage recouvre le carré, cette aire est A^2. Ainsi $A^2 \leqslant nA$ donc $A \leqslant n$ (car $A > 0$). Il n'existe aucun A-pavage d'effectif $n < A$.



Question 10. On suppose ici sans perte de généralité que le carré pavé est de côté 2. S'il existe un 2-pavage d'effectif 3 alors chacun des quatre coins du carré pavé est en contact avec un des 3 rectangles qui le pavent. Il y a donc un rectangle en contact avec deux coins. Ces deux coins sont consécutifs sinon le rectangle couvre tout le carré ce qui n'est pas possible : ce rectangle est donc de longueur 2 et de largeur 1. L'espace restant à paver (en

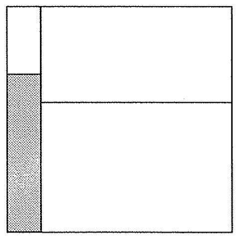
gris) est lui-même rectangle, et au moins deux de ses coins est en contact avec le même rectangle du pavage. Ces deux coins ne peuvent pas être opposés, ni consécutifs suivant la longueur car alors le rectangle du pavage serait le rectangle gris lui même, ne laissant pas de place au dernier rectangle. C'est donc qu'un des rectangles du pavage est en contact avec la totalité d'une des largeurs du rectangle gris, et forcément le long de sa propre longueur pour laisser de la place au dernier rectangle. Ses dimensions sont ainsi $1\times\frac{1}{2}$ ce qui laisse un espace à paver gris de dimensions $1\times\frac{3}{2}$. Cet espace doit être couvert par un unique rectangle, mais n'est pas d'aspect 2.



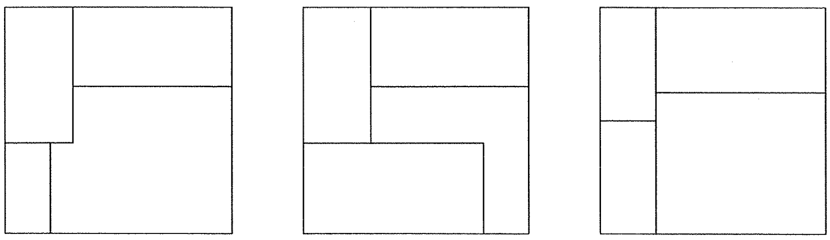
Il n'existe ainsi aucun 2-pavage d'effectif 3.

Remarque : il n'existe pas non plus de 2-pavage d'effectif 4.

En effet, s'il existe un 2-pavage d'effectif 4 et qu'un des rectangles du pavage est en contact avec deux coins du carré à paver alors le raisonnement précédent s'applique à ceci près que l'espace de dimensions $1\times\frac{3}{2}$ doit être pavé avec deux rectangles d'aspect deux ce qui n'est pas clairement pas possible. C'est donc que chaque rectangle du pavage est en contact avec exactement un des coins du carré à paver. Quitte à faire une symétrie axiale suivant une diagonale du carré, supposons que le rectangle en haut à gauche (noté HG) est disposé verticalement (sa longueur est verticale et sa largeur est horizontale). Pour laisser de la place au rectangle BG en bas à gauche sa longueur doit être strictement inférieure à 2 et donc sa largeur strictement inférieure à 1. Le rectangle HD en haut à droite ne peut ainsi être vertical sinon il aurait lui aussi une largeur strictement inférieure à 1 et laisserait un vide le long du côté supérieur du carré.



Il est donc horizontal et sa largeur n'est pas supérieure à la longueur du rectangle HG sinon il y aurait un espace libre sous HG et à gauche de HD qui serait impossible à combler avec le rectangle BG en conservant son aspect 2 (voir ci-contre). On est donc dans une des trois situations ci-dessous :



Dans les deux situations de gauche, l'espace restant à paver par le rectangle BD en bas à droite n'est pas rectangulaire ce qui est impossible. Dans la situation la plus à droite on a représenté BG verticalement de même largeur que HG mais il peut aussi être horizontal de longueur égale à la largeur de HG. L'important est que l'espace restant à paver avec BD, même s'il est bien rectangle, n'est pas d'aspect 2. En effet sa dimension horizontale h est égale à $2-l$ où $l<1$ est la largeur de HG donc $h>1$ ne peut être la largeur de BD qui est ainsi disposé horizontalement. Puisque h est aussi la longueur de HD d'aspect 2 la dimension verticale v de l'espace restant est égale à $v=2-\frac{h}{2}>1>\frac{h}{2}$ puisque $\frac{h}{2}<1$. $v\neq\frac{h}{2}$ et BD ne peut avoir le bon aspect.

En définitive il n'y a pas de 2-pavage d'effectif 4.