Exercice 1 (tous les candidats)

Plus fort !

1. *Pourcentages pour tous les âges.*
a. Oui car la multiplication est commutative : $\frac{x}{100}y = \frac{y}{100}x$. En particulier, en intervertissant les données proposées, on se ramène 25 % de 32 euros, qui en est le quart, soit 8 euros.
b. Même pas en rêve ! Le prix est multiplié par $0{,}75^4$, soit environ 0,32.
c. Oui, là encore parce que les diagrammes sont commutatifs. Notons x le prix HT et y le prix TTC ; ils sont liés par la relation $y = 1{,}2\,x$. Si l'on double y, cela double $1{,}2\,x$, et donc x.

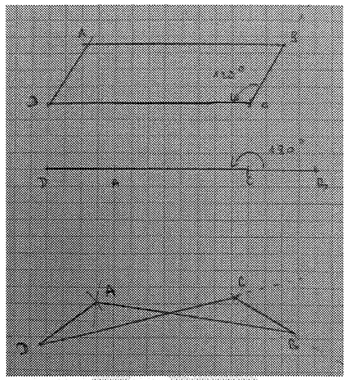
2. *Double sens.* Selon que le « le » renvoie au « nombre » ou à « 51 », on trouve 5 100 ou 0,51. Pour lever l'ambiguïté il faudrait construire la question différemment et au besoin, utiliser des virgules.

3. *Le secret pour avoir* 20/20. Le candidat reçoit la note de 7 sur 20. Pourtant, $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{12+3}{15} = 1 = \frac{20}{20}$: le paradoxe tient à ce que le calcul fractionnaire ne tient compte d'aucun coefficient (le problème et l'exercice sont mis sur le même plan, et la « note » est donnée sur 2 et non sur 20).
Dans le cas général, on compare $\frac{a}{5} + \frac{b}{15}$ à $+\frac{a+b}{20}$. Or $\frac{a+b}{20} - \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{15}\right) = -\frac{9a+b}{60}$ qui est négatif, d'où le résultat.

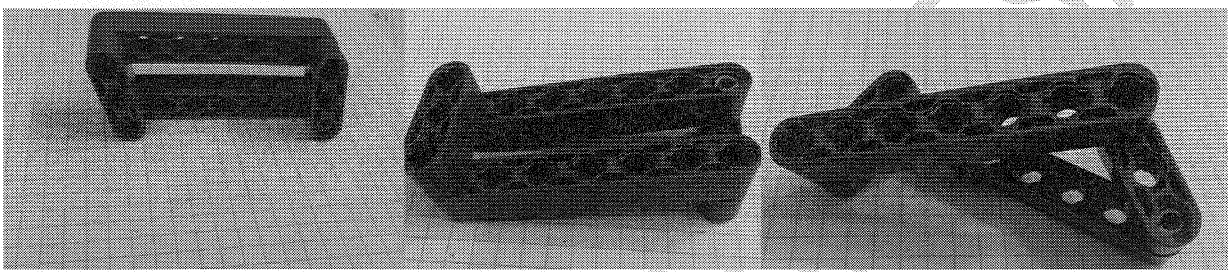
4. *Trouver l'intrus.* On prend 4 oranges au hasard, on en répartit 2 sur chaque plateau. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange non utilisée qui est la moins lourde. Sinon, on prend les 2 oranges du plateau le plus léger et on les compare avec une nouvelle pesée. Avec 2 024 oranges, c'est à peu près la même idée, que l'on réitère. On met 1 012 oranges de part et d'autre. Un plateau est le plus léger. On utilise les 1 012 oranges de ce plateau, on en met 506 de part et d'autre. Un plateau est plus léger. On utilise les 506 oranges de ce plateau, on en met 253 de part et d'autre. Un plateau est plus léger, on prend au hasard 252 de ses oranges, on en met 126 de part et d'autre. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange mise de côté qui est la plus légère. Sinon, on utilise les 126 oranges du plateau le plus léger et on recommence à chaque fois en mettant une orange de côté dès qu'on manipule un nombre impair d'oranges. Dans le pire cas, on passe de 2 024 à 1 012 à 506 à 253 à 126 à 63 à 31 à 15 à 7 à 3 à 1 orange(s) soit 10 pesées. Si l'on commence avec 675 oranges de part et d'autre, on peut réussir en 7 pesées. optimal

5. *Tchin !* La pente des parois est (au signe près) égale à $\frac{10}{5} = 2$. Le verre du dessus a besoin de 9 cm de large. Il est translaté verticalement de $1 + 2 = 3$cm (1 correspond à la hauteur du fond du verre du dessous, et 2 à la hauteur nécessaire pour élargir de 1cm l'espace de chaque côté des 7cm de base. L'ensemble s'élève à 13 cm.

6. *Le début de la richesse.* D'après le théorème de Thalès, la configuration proposée entraîne (et même revient à) égaler $\frac{L}{\ell}$ et $\frac{L+\ell}{L}$. Posons $x = \frac{L}{\ell}$. Tout revient donc à $x = 1 + \frac{1}{x}$. On peut ensuite vérifier que le nombre (d'or) vérifie cette équation, ou la résoudre puisqu'elle se ramène à une équation du second degré.



7. *Quelle forme !?*
Dessins ci-contre. Pour ce qui est de la réalisation pratique, il y a trois configurations possibles, ici réalisées avec des briques de jeu de construction : deux étages avec les deux grandes barrettes au-dessus des deux petites ; trois étages avec les deux grandes barrettes au même niveau, une petite au-dessus, une petite au-dessous ; trois étages avec les deux petites barrettes au même niveau, une grande au-dessus, une grande au-dessous. Seule la troisième configuration se déforme jusqu'au contre-parallélogramme sans quoi les grandes barrettes vont se gêner quand elles vont se croiser ; quant aux petites, qui sont au même niveau, elles suffisamment petites pour ne pas se gêner à l'endroit des pivots.



8. *Rien que pour vos yeux.* Notons $a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ un vecteur directeur et orientant du rayon incident. Et suivons (par exemple) la trajectoire lue sur le dessin. Après le premier rebond, le rayon est dirigé et orienté par $a\vec{\imath}-b\vec{\jmath}+c\vec{k}$, après le deuxième par $-a\vec{\imath}-b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ et après le troisième par $-a\vec{\imath}-b\vec{\jmath}-c\vec{k}$. Le rayon réfléchi qui en résulte est parallèle au rayon incident mais repart dans l'autre sens. Si le coin de cube est petit, ce rayon réfléchi est spatialement très proche du rayon incident. Un catadioptre est composé de nombreux tout petits coins de cube. Un émetteur (voiture avec des phares avant par exemple) le reçoit donc dans les yeux, ce qui l'avertit de la présence d'une voiture ou d'un cycliste devant lui.

9. Méthode 1. Notons e l'épaisseur et n le nombre de tours (on le suppose entier, on commet ici une petite erreur). Donc $R+ne=R'$. 1 tour déroule $2\pi R$ longueur de bande, le tour suivant $2\pi(R+e)$, ... le n ième $2\pi(R+(n-1)e)$. On néglige le petit morceau de bande nécessaire pour monter, d'un tour à l'autre, de l'épaisseur e. En sommant arithmétiquement, $\frac{2\pi(R+e)+2\pi(R+(n-1)e)}{2}n = 2\,500$ cm. En remplaçant n par $\frac{R'-R}{e}$ on isole $\frac{1}{e}$ puis e qui est (presque) égal à 0,0044 cm, soit la moitié de l'épaisseur d'un cheveu.
Méthode 2. L'aire de la couronne est $\pi\left(R'^2-R^2\right)$. Une fois la bande déroulée on a, toujours vu de profil, un rectangle de largeur e et de longueur 2 500 cm. Donc $e=\frac{\pi\left(R'^2-R^2\right)}{2500}$ soit environ 0,0044 cm
10. Partons d'un tableau déjà ordonné horizontalement. Et, sur chaque colonne, intervertissons au besoin les valeurs de la première et de la deuxième ligne. Cela ordonne dans le sens vertical les deux premières lignes. Et on se doute que cela laisse les deux premières lignes bien classées (sinon pour $n=2$ le résultat de l'énoncé serait faux). Il suffirait alors de répéter cette démarche pour des lignes contiguës (ce qui revient à effectuer un tri bulle colonne par colonne). Revenons donc au cas $n=2$, qui se réduit à constater que si $x\le x'$ et $y\le y'$, alors $\min(x,y)\le\min(x',y')$ et $\max(x,y)\le\max(x',y')$.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Nous sommes toutes distinctes !

Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples

1. On peut choisir de prendre ou de ne pas prendre chaque élément pour former une somme, soit 2^n possibilités. Mais on s'interdit la somme vide. Il faut donc vérifier que les $2^n - 1$ « vraies » sommes à envisager sont toutes distinctes.

2. Les sommes possibles réalisables avec $\{1{,}3{,}5\}$ sont 1, 3, 5, 4, 8, 6, 9 : elles sont toutes distinctes. Avec l'ensemble $\{4{,}6{,}7{,}9\}$ on remarque que $6 + 7 = 4 + 9$.

3. Le singleton $\{0\}$ est un STD. C'est le seul : tout autre ensemble contenant 0 contient un autre élément $a \neq 0$. Mais alors les sommes a et $a + 0$ sont égales.

4.

a. Les sommes formées d'éléments de A sont en particulier des sommes formées d'éléments de B. Elles sont donc toutes distinctes.

b. Par contraposition, B n'est alors pas STD.

5. Pour $A' = A \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$: les sommes n'impliquant que des éléments de A sont toutes distinctes. Les sommes associant $\frac{1}{2}$ aussi (elles sont translatées des précédentes). Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\frac{1}{2}$ serait entier.

Pour $A \cup \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\} = A' \cup \{\sqrt{2}\}$. On sait déjà que A' est STD. Donc on procède comme ci-dessus, avec les sommes n'impliquant que A', les sommes associant $\sqrt{2}$ aussi. Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\sqrt{2}$ serait rationnel.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \ldots + u_n + 1$$

6. On a $u_2 = 1 + 1 = 2$ et $u_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. Puis $u_4 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$ et $u_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 1 = 16$.

7. On peut éviter d'imbriquer une boucle dans une autre et de manipuler des listes, par exemple comme ceci.

```
def STD(n) : # on choisira n=100
    s=0
    u=s+1
    for k in range(n-1):
        s = s + u
        u = s + 1
    return u
```

8. De proche en proche, les termes de la suite u sont tous strictement positifs. Donc $u_{n+1} - u_n = (u_1 + \cdots + u_{n-1}) + 1 > 0$. La suite croît strictement.

9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est STD. On compare deux sommes qui n'impliquent pas exactement les termes. On suppose ces deux sommes égales. On simplifie à gauche et à droite. Les termes qui restent à gauche sont tous distincts de ceux qui restent à droite. Imaginons que la somme de gauche soit celle qui implique le terme de plus haut rang p. On l'isole en basculant tous les autres tout à droite. A droite, on a une somme de termes de la suite, tous distincts, tous de rang $p - 1$ au plus, pondérée de + ou de -. On la majore par la somme avec les +. On la majore encore en introduisant les termes manquants pour faire apparaître tous les indices de 1 à $p-1$. Dès lors $u_p \leq u_1 + \cdots + u_{p-1}$. Or $u_p = u_1 + \cdots + u_{p-1} + 1$. C'est absurde.

10. De proche en proche (c'est une récurrence simple dont on ne demande pas de dire son nom), et par sommation géométrique, $u_n = 2^n$.

Partie 3 : Suites STD

11.

a. On peut créer $2^n - 1$ entiers naturels non nul distincts avec les sommes de $u_1, \dots, u_n$. Or le plus grand de ces entiers est $u_1 + \cdots + u_n$: il est donc supérieur ou égal à $2^n - 1$.

b. Ainsi, puisque $u_2 > u_1$,

$$nu_n > u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$$

Nous comparons des entiers. Donc $nu_n \geq 2^n$, puis $u_n \geq \frac{2^n}{n}$.

12.

a. On a $E(X_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $V(X_1) = E\left({X_1}^2\right) - \left(E(X_1)\right)^2 = E\left({X_1}^2\right) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} 1 = 1$ puis, d'après les formules données dans l'énoncé, $E(X) = 0$ et $V(X) = u_1^2 + \ldots + u_n^2$.

b. Les 2^n sommes de la forme $\pm u_1 \pm \ldots \pm u_n$ sont toutes différentes (par caractère STD, en ajoutant $u_1 + \ldots + u_n$, en divisant par 2, et sachant qu'une somme de u_i est strictement positive). En ajoutant $u_1 + \ldots + u_n$, on obtient des nombres pairs, donc toutes les sommes ont bien même parité. En échangeant les +1 et les -1 pour un tirage donné, on a la symétrie par rapport à l'origine, et, si on atteignait 0, alors en passant les -1 de l'autre côté de l'égalité, cela contredirait le caractère STD de la suite. Enfin, ces 2^n entiers ont la même probabilité $\frac{1}{2^n}$ d'être atteints, d'où le résultat.

c. Puisque X est centrée, $V(X) = E(X^2)$. Or X^2 prend 2^{n-1} valeurs, chacune avec une probabilité $\frac{1}{2^{n-1}}$, ces valeurs étant des carrés d'entiers naturels non nuls distants d'au moins 2 (puisqu'ils ont même parité). Ainsi,

$$V(X) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2 \ \left(= \frac{4^n - 1}{3}\right)$$

Or $V(X) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq n{u_n}^2$, donc :

$$ {u_n}^2 \geq \frac{1}{n\, 2^{n-1}} \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2^n - 1)^2\right)$$

d. Pour $n = 4$, cette inégalité donne $u_4 \geq 4{,}6$ et l'inégalité de la question **11.*b*** donnait $u_4 \geq 4$.

Exercice 3 (candidats de la voie générale ne suivant pas l'enseignement « spé maths » et tous les candidats de la voie technologique)

Pyramides de Pascal

1. On somme dans un sens, dans un autre, puis on moyenne (méthode de Gauss).

2.*a.* On trouve :

1

5 4

1 6 2

4 3 9 7

b. Par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 2 \end{array}$$

3. *Nombre d'entiers dans une pyramide de Pascal*

a. On trouve $3+2+1=6$ nombres pour 3 lignes, et $4+3+2+1=10$ nombres pour 4 lignes.

b. Pour n lignes, on a : $n+(n-1)+\cdots+2+1 \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$ nombres, en utilisant la question 1.

4. Chaque nombre d'une ligne autre que la dernière est inférieur ou égal au plus grand des deux nombres de la ligne inférieure dont il est issu. Il lui est même strictement inférieur puisqu'aucun nombre d'une pyramide parfaite n'est nul. Donc le plus grand est en dernière ligne. Et vaut le nombre de nombres que la pyramide contient, soit $\frac{n(n+1)}{2}$.

5. Après quelques tâtonnements, on trouve par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 5 & & 2 & \\ 1 & & 6 & & 4 \end{array}$$

6.

a. La symétrisée d'une pyramide de Pascal par rapport à l'axe vertical médiateur est encore une pyramide de Pascal, et échange les termes de droite avec ceux de gauche. D'où le résultat.

b. Le chemin part du sommet x_1, se connecte (à la ligne 2) à x_2 au détriment de y_2, puis à x_3 au détriment de y_3, puis, …, puis à x_n au détriment de y_n. Remarquons : $x_2=y_2+x_1,\;\; x_3=y_3+x_2,\ldots,\; x_n=y_n+x_{n-1}$. En additionnant il vient $x_n=y_n+y_{n-1}+\cdots+y_2+x_1$. D'une part le nombre x_n est inférieur ou égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. D'autre part il est égal à une somme d'entiers naturels distincts distincts. Que cette somme implique un seul élément situé en dehors du segment entier $[\![1,n]\!]$ et elle dépassera strictement $\frac{n(n+1)}{2}$. Nécessairement, la somme vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ et les termes impliqués décrivent exactement $[\![1,n]\!]$. Le chemin étudié par du sommet et aboutit en bas à droite. Il ne peut jamais bifurquer à gauche (il ne pourrait pas rattraper le chemin « perdu ») : rectiligne, il emprunte donc le bord droit.

c. Envisageons le triangle proposé, qui contient $n-2$ lignes, aucun des nombres du segment $[\![1,n]\!]$ et pas non plus le terme $\frac{n(n+1)}{2}$. Partons de son sommet x'_1 et construisons le chemin qui descend en se connectant, comme en question précédente, à chaque fois au plus grand des deux termes situés immédiatement en-dessous. Ce chemin aboutit en x'_{n-2}. En adaptant les notations précédentes, $x'_{n-2}=y'_{n-2}+y'_{n-3}+\cdots+y'_2+x'_1$. Le membre de droite comporte $n-2$ termes distincts, et chacun de ces termes est supérieur ou égal à $n+1$. Donc le membre de droite est supérieur ou égal à $(n+1)+(n+2)+\cdots+\big(n+(n-2)\big)=\frac{3n-1}{2}(n-2)$. Or le membre de gauche est inférieur ou égal à $\frac{n(n+1)}{2}-1$. D'où

$$\frac{3n-1}{2}(n-2) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Il suit $2n^2 - 8n + 3 \leq 0$. Or $2n^2 - 8n + 3 = 2n(n-4) + 3 > 0$ pour $n \geq 4$. D'où le résultat.

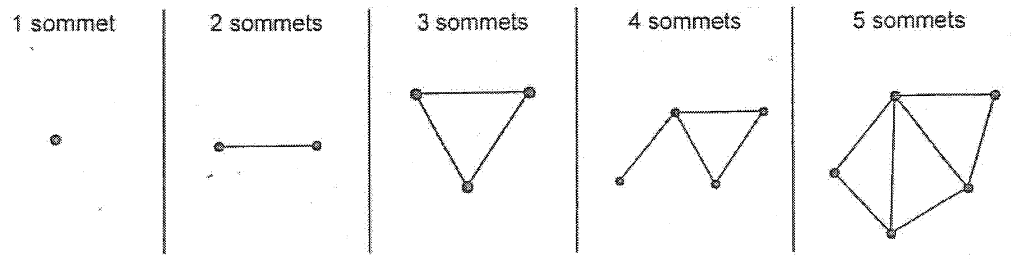
ACADÉMIE
DE LYON
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Sujet académique - corrigé

Exercice 1 : Un problème de croisements

1- Des graphes planaires à 1 sommet, à 2 sommets, à 3 sommets, à 4 sommets et à 5 sommets.



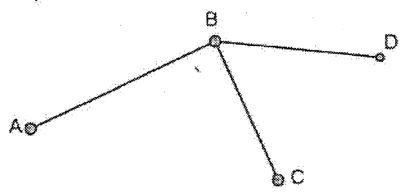
2- a- Vérifier que le graphe à un sommet vérifie la relation d'Euler.

Le graphe a 1 sommet, 0 arête et 1 région, et la relation 1−0+1=2 est bien vérifiée.

b- Sur votre copie, faire une illustration de chacune de ces situations puis vérifier que chacun des graphes obtenus satisfait la relation d'Euler.

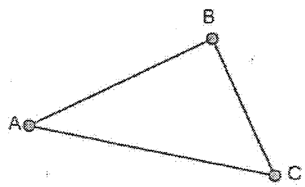
- Situation 1 : le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête.

  Dans ce cas, $s + r - a = 4 + 1 - 3 = 2$,
  la relation d'Euler est vérifiée



- Situation 2 : le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ajoute une arête et une région.

  Dans ce cas, $s + r - a = 3 + 2 - 3 = 2$,
  la relation d'Euler est vérifiée



c- Conclure que la relation d'Euler est vraie pour tout graphe planaire.

Tout graphe planaire peut être obtenu en partant du graphe avec un seul sommet et aucune arête et en rajoutant des arêtes une par une, partant d'un sommet déjà existant et arrivant vers un sommet soit déjà existant, soit nouveau.
Deux cas de figure se présentent lorsqu'on rajoute une arête.

- Si le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête. En rajoutant cette arête et ce sommet, le nombre de régions reste inchangé (puisque la nouvelle arête ne coupe aucune face en deux). s devient $(s+1)$ et a devient $(a+1)$, la valeur de $s+r-a$ ne change pas.
- Si le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ne rajoute aucun sommet. En revanche, la nouvelle arête coupe toujours une région en deux. Dans ce cas, a devient $(a+1)$ et r devient $(r+1)$, ce qui laisse à nouveau la valeur de $s+r-a$ inchangée.

3- Justifier que pour tout graphe planaire ayant 3 sommets ou plus, $r \leq \frac{2}{3}a$.

Notons r le nombre de régions d'un graphe ($r \in \mathbb{N}^*$), alors $r = \sum_{i=1}^{r} r_i$ en numérotant de 1 à r les r régions du graphe (on a alors pour tout entier i entre 1 et r, $r_i = 1$).
Chaque région est délimitée par au moins 3 arêtes donc pour tout entier i entre 1 et p :

$$3r_i \leq a_i$$

où a_i est le nombre d'arêtes délimitant la i[ème] région.
Notons a le nombre total d'arêtes du graphe, chaque arête étant commune à deux régions, on a alors : $a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} a_i$

Ainsi : $r = \sum_{i=1}^{r} r_i \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{r} a_i = \frac{2}{3}a$

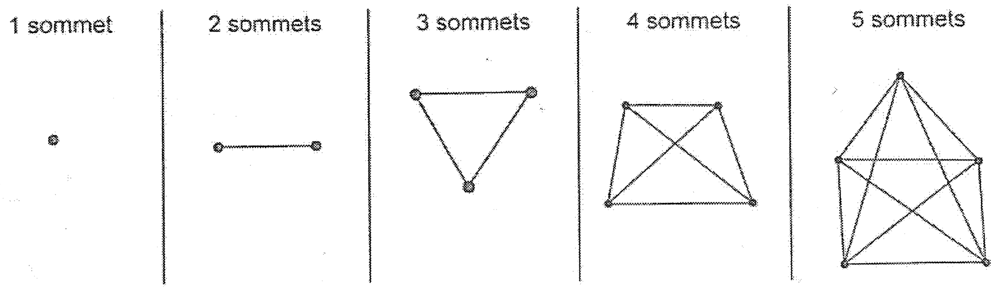
4- En déduire que pour tout graphe planaire ayant plus de 3 sommets,

$$2 - s + \frac{a}{3} \leq 0 \quad (relation\ (2))$$

En injectant le résultat du 3- dans la formule d'Euler, on obtient :
$2 = s + r - a \leq s - \frac{1}{3}a$ donc $2 - s + \frac{a}{3} \leq 0$

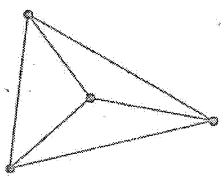
Partie 2 : Avec croisement de rail

5- a- Tracer une représentation des graphes complets K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.



b- Déterminer $Cr(K_1), Cr(K_2), Cr(K_3)$ et $Cr(K_4)$.

On peut affirmer que $Cr(K_1) = Cr(K_2) = Cr(K_3) = 0$
et aussi que $Cr(K_4) = 0$



6- a- En utilisant la $relation\ (2)$, prouver que K_5 n'est pas un graphe planaire.

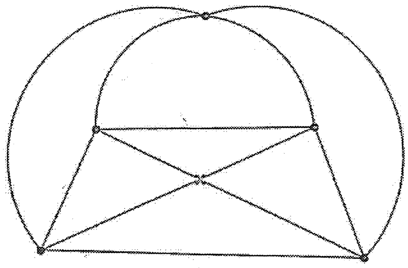
K_5 possède 5 sommets et 10 arêtes, $2 - s + \frac{a}{3} = -3 + \frac{10}{3} > 0$

Si un graphe est planaire, il vérifie la *relation (2)*.

Par contraposée, on déduit que K_5 n'est pas planaire.

b- Déterminer $Cr(K_5)$ (vous pourrez vous aider d'une représentation de K_5).

Voici une représentation de K_5 avec un croisement donc $Cr(K_5) \leq 1$



Les croisements sont marqués par une croix rouge et les sommets par un rond bleu

D'après a- comme K_5 n'est pas planaire, $Cr(K_5) \geq 1$

Par double inégalité, on en déduit que $Cr(K_5) = 1$.

5- Considérons le graphe K_n , $n \in \mathbb{N}^*$

a- Déterminer en justifiant le nombre d'arêtes de ce graphe.

Chacun des n sommets du graphe est relié aux $(n-1)$ autres et chaque arête relie deux sommets donc le graphe complet d'ordre n compte $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

b- Quel est le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G_n ?

Les sommets de $G_n$sont les sommets de K_n auxquels on ajoute le nombre de croisements : il y en a donc $n + cr(K_n)$

Le nombre d'arêtes de G_n est $\frac{n(n-1)}{2} + 2Cr(K_n)$

c- Appliquer la $relation$ (2) à G_n et justifier que $Cr(K_n) \geq \frac{n^2-7n+12}{2}$

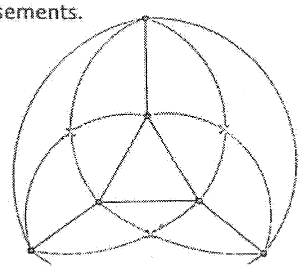
G_n est un graphe planaire, on peut lui appliquer la *relation (2)* :

$$2 - n - Cr(K_n) + \frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{3}Cr(K_n) \leq 0 \Leftrightarrow 2 - n + \frac{1}{6}n(n-1) \leq \frac{1}{3}Cr(K_n)$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq Cr(K_n)$$

Et donc $Cr(K_n) \geq \frac{n^2-7n+12}{2}$

d- Déterminer $Cr(K_6)$ et tracer une représentation de K_6 avec $Cr(K_6)$ croisements.



On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_6) \geq \frac{36 - 42 + 12}{2} = 3$$

Or $Cr(K_6) \leq 3$ d'après la représentation graphique ci-contre

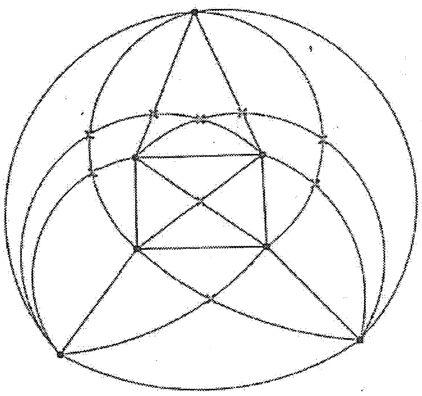
Par double inégalité, $Cr(K_6) = 3$

e- Pouvez-vous déterminer avec certitude $Cr(K_7)$? Tracer une représentation de K_7 qui permet d'approcher au mieux $Cr(K_7)$.

On applique l'inégalité de la question 4 dans le cas où $n = 6$,

$$Cr(K_7) \geq \frac{49 - 49 + 12}{2} = 6$$

Par représentation du graphe, je trouve au mieux $Cr(K_7) \leq 9$ et je ne peux donc rien affirmer avec certitude



Regardons les coefficients des polynômes modulo 2 :

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + x^2$; $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$

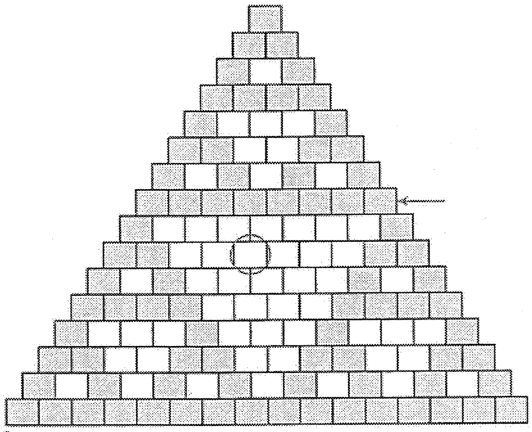
$(1+x)^4 = (1+x^2)^2 = 1 + x^4$

Pyramide de cellules grises

Correction

§1. Premiers exemples

Question 1. *a)*



$L_0 = (1+x)^0 = 1$
$L_1 = (1+x)^1 = 1 + x$
$L_2 = (1+x)^2 = 1 + x^2$
L_3
$L_4 = (1+x)^4 = (1+x^2)^2 = 1 + x^4$
L_5
L_6
L_7
$L_8 = (1+x)^8 = (1+x^4)^2 = 1 + x^8$
L_9
$L_{10} = (1+x)^{8+2} = (1+x^8)(1+x^2) = 1 + x^2 + x^8 + x^{10}$
L_{11}
L_{12}
L_{13}
L_{14}
$L_{15} = (1+x)^{8+4+2+1} = (1+x^8)(1+x^4)\cdot(1+x^2)(1+x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}$

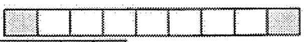
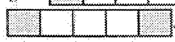
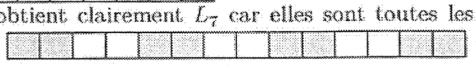
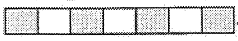
b) $L_9[4]$ = blanc.

Question 2. Le plus petit entier $n \geqslant 5$ tel que L_n est totalement grise est $n = 7$.

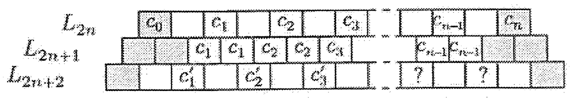
Question 3.

```
def suivante(L):
    n = len(L) - 1
    S = [None] * (n+2)
    S[0] = S[n+1] = 1
    for k in range(n):
        if L[k] == L[k+1]:
            S[k+1] = 0
        else:
            S[k+1] = 1
    return S
```

§2. Couleur et parité

Question 4. $L_8 =$  peut s'obtenir en intercalant des cellules blanches entre les cellules de $L_4 =$ . De même on obtient $L_{12} =$  peut en intercalant des cellules blanches entre les cellules de $L_6 =$ .
En dessinant deux fois de suite chaque cellule de L_3 on obtient clairement L_7 car elles sont toutes les deux entièrement grises et les longueurs correspondent. $L_{13} =$  est le dédoublement de $L_6 =$ .

Question 5. *a)*



b) L'hypothèse de la question se traduit par la représentation de L_{2n} ci-dessus (on a intercalé des cellules blanches). Il est alors clair d'après les règles de construction que $L_{2n+1}[0] = L_{2n+1}[1] = \text{gris} = L_{2n}[0] = c_0$; de même pour les deux dernières cellules de L_{2n+1}.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, puisque $L_{2n}[2k-1]$ = blanc alors $L_{2n+1}[2k]$ = blanc si et seulement si c_k = blanc ce qui montre que $L_{2n+1}[2k] = c_k$. De la même façon $L_{2n}[2k+1]$ = blanc donc $L_{2n+1}[2k+1] = c_k$.
En définitive on a bien démontré que L_{2n+1} est telle que représentée avec les cellules de couleur c_k dédoublées.

— 4 —

$(1+x)^{2n} = (1+x^2)^n = ((1+x)^n)^2$

$(1+x)^{2n+1} = (1+x)(1+x^2)^n$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. D'après la question précédente $L_{2n+1}[2k] = L_{2n+1}[2k+1] = c_k$ donc la règle de propagation donne $L_{2n+2}[2k+1] =$ blanc.
D'autre part $c'_k = L_{2n+2}[2k]$ s'obtient avec les règles de propagation en comparant c_{k-1} et c_k qui sont des cases consécutives de L_n. Ainsi $c'_k = L_{n+1}[k]$.
En définitive L_{2n+2} s'obtient bien en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_{n+1}.

Question 6. La propriété est vraie pour les petites valeurs de n, en particulier pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour $n \geqslant 0$. D'après la question précédente il est alors vrai pour $n+1$. Par récurrence le résultat est donc vrai pour tout n.

§3. Écriture binaire

Question 7. a) $0 = (0)_2$ $1 = (1)_2$ $2 = (10)_2$ $3 = (11)_2$ $4 = (100)_2$ $5 = (101)_2$ $6 = (110)_2$
b) $(10101)_2 = 21$, $(1010)_2 = 10$.

Question 8. a) $\begin{array}{l} 5 = (\ \underset{\vee}{1}\ \ \underset{\wedge}{0}\ \ \underset{\vee}{1}\ )_2 \\ 3 = (\ 0\ \ 1\ \ 1\ )_2 \end{array}$ donc 5 ne domine pas 3 à cause du deuxième chiffre.

b)

n	1	5	5	6	6	6
k	0	1	3	4	3	2
Écriture binaire de n	$(1)_2$	$(101)_2$	$(101)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$	$(110)_2$
Écriture binaire de k	$(0)_2$	$(001)_2$	$(011)_2$	$(100)_2$	$(011)_2$	$(010)_2$
n domine k	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai
$L_n[k]$	gris	gris	blanc	gris	blanc	gris

c) On conjecture que n domine $k \iff L_n[k] =$ gris.

Question 9. Procédons par récurrence sur le nombre a de chiffres binaires de n : définissons $\mathcal{P}(a)$ la propriété « pour tous entiers naturels n et k pouvant s'écrire avec a chiffres binaires et tels que $k \leqslant n$, $L_n[k] =$ gris si et seulement si n domine k ». Si $a = 1$, les seuls cas à regarder sont $L_0[0] = L_1[0] = L_1[1] =$ gris qui confirment bien $\mathcal{P}(1)$.
Supposons $\mathcal{P}(a)$, et démontrons $\mathcal{P}(a+1)$. Soient n et k pouvant s'écrire avec $a+1$ chiffres, et $k \leqslant n$. Avec les notations proposées, on a $n = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$. Posons $n' = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1)_2$ et $k' = (k_a k_{a-1} \dots k_3 k_2 k_1)_2$. Alors $n = 2n' + n_0$ et $k = 2k' + k_0$, où n' et k' peuvent s'écrire avec a chiffres, et bien entendu $k' \leqslant n'$.
Si pour tout i, $n_i \geqslant k_i$, alors $n_0 \geqslant k_0$ et d'après [$*$] $L_n[k] = L_{2n'+n_0}[2k'+k_0] = L_{n'}[k'] =$ gris en utilisant $\mathcal{P}(a)$.
Si il existe $0 \leqslant i \leqslant a$ tel que $n_i < k_i$, alors ou bien $n_0 < k_0$ et d'après [$*$] $L_n[k] =$ blanc, ou bien $n_0 \geqslant k_0$ et $i \geqslant 1$. Mais alors $L_n[k] = L_{n'}[k'] =$ blanc en appliquant $\mathcal{P}(a)$.
Dans tous les cas, $\mathcal{P}(a) \implies \mathcal{P}(a+1)$ et puisque $\mathcal{P}(0)$ la propriété est démontrée.

Question 10. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $k \leqslant n$, $L_n[k] =$ gris, alors en particulier $L_n[2^i] =$ gris donc nécessairement $n_i \geqslant 1$, et ce dès que $2^i \leqslant n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i \leqslant a, n_i = 1$: tous les chiffres de n sont des 1. Ainsi $n = 2^a - 1$.
Réciproquement, si $n = 2^a - 1$ alors tous ses chiffres sont des 1 et la propriété de la question 9 est facilement vérifiée pour tout k : la ligne $L(n)$ ne contient que des cellules grises.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrivant avec a chiffres binaires. Si pour tout $0 < k < n$, $L_n[k] =$ blanc, alors en particulier $L_n[2^i] =$ blanc. Or tous les chiffres de 2^i sont nuls sauf k_i, donc c'est nécessairement celui-là qui est supérieur strictement à celui de n : $n_i < k_i = 1$, soit $n_i = 0$ et ce dès que $2^i < n$. En définitive, $\forall 0 \leqslant i < a, n_i = 0$: tous les chiffres de n sont des 0, sauf celui le plus à gauche. Ainsi $n = 2^{a-1}$.
Réciproquement, si $n = 2^{a-1}$, alors tous ses chiffres sauf le plus à gauche sont nuls. Si $k = 0$ tous ses chiffres sont nuls et l'on retrouve bien $L_n[k] =$ gris. Si $k = n$ les chiffres de k sont ceux de n et ne leur sont pas supérieurs ; ainsi $L_n[n] =$ gris. Si $0 < k < n$, il existe un chiffre de k non nul, et ce chiffre est dans la même position qu'un chiffre nul de n (car $k \neq n$), donc $L_n[k] =$ blanc d'après la propriété de la question 9.
En définitive, les lignes entièrement blanches exceptés les extrémités sont les lignes $L(2^{a-1})$.

$(1+x)^{64+16+8+1} = (1+x^{64})(1+x^{16})(1+x^{8})(1+x)$

Question 11. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $L_n[k] =$ gris si et seulement si l'écriture binaire de k contient des zéros aux mêmes positions que ceux de l'écriture binaire de n. Les autres chiffres binaires de k peuvent prendre n'importe quelle valeur.
En notant s le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de n on obtient tous les k tels que $L_n[k] =$ gris en considérant toutes les combinaisons de 0 et 1 pour les s chiffres « libres » et en plaçant des 0 sur les autres chiffres.
Il y a ainsi 2^s nombres k tels que $L_n[k] =$ gris donc 2^s cellules grises dans $L(n)$. (s est aussi la somme des chiffres binaires de n).

Supplément : De moins en moins de cellules grises

Question 1. $M(1) = E(1) = 2$; $M(2) = 6$ et $E(2) = 7$.

Question 2. *a)* L'écriture binaire de $2n$ est celle de n avec un 0 ajouté tout à droite. Ainsi les deux écritures ont le même nombre s de chiffres 1 et $I(2n) = I(n)$.
L'écriture binaire de $2n+1$ contient exactement un chiffre 1 de plus donc $I(2n+1) = 2^{s+1} = 2 \times 2^s = 2I(n)$.

b) $M(r) = I(2^{r-1}) + I(2^{r-1}+1) + \cdots + I(n) + \cdots + I(2^r - 1)$. $M(r+1) = I(2^r) + I(2^r+1) + \cdots + I(2n) + I(2n+1) + \cdots + I(2^{r+1}-1)$.
On peut grouper toutes les lignes intervenant dans $M(r+1)$ deux par deux avec $I(2^r) + I(2^r+1) = I(2 \times 2^{r-1}) + I(2 \times 2^{r-1}+1) = I(2^{r-1}) + 2I(2^{r-1}) = 3I(2^{r-1})$ et $I(2n) + I(2n+1) = I(n) + 2I(n) = 3I(n)$.
En sommant toutes ces égalités on obtient $M(r+1) = 3M(r)$.

Question 3. *a)* Notons $K(n) = n+1$ le nombre d'entiers dans la ligne $L(n)$. Alors $K(2n)+K(2n+1) = 2n+1+2n+2 = 4n+3 = 4K(n) - 1 < 4K(n)$.
Si $n \geqslant 1$, $K(n) \geqslant 2$ donc $\frac{1}{2}K(n) - 1 \geqslant 0$ et ainsi $4K(n) - 1 \geqslant \frac{7}{2}K(n)$.
En définitive, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{7}{2}K(n) \leqslant K(2n) + K(2n+1) < 4K(n)$. En groupant deux à deux les termes dans $E(r+1)$ comme dans la question précédente et en sommant les inégalités on obtient aisément $\frac{7}{2}E(r) \leqslant E(r+1) < 4E(r)$.

b) $\dfrac{1}{4E(r)} < \dfrac{1}{E(r+1)} \leqslant \dfrac{2}{7E(r)}$, donc $\dfrac{3M(r)}{4E(r)} < \dfrac{3M(r)}{E(r+1)} \leqslant \dfrac{6M(r)}{7E(r)}$, ce qu'il fallait démontrer.

c) $P(1) = 1$ donc $P(2) \leqslant \dfrac{6}{7}$ puis $P(3) \leqslant \dfrac{6}{7} \times \dfrac{6}{7}$ et en définitive $P(r) \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{r-1}$.
La proportion $P(r)$ devient de plus en plus faible et s'approche de 0 à mesure que r devient grand.