

Exercice 1

1. **a.** Au bout d'un tour, on obtient $1 + 5 = 6$. Au bout de deux tours, on obtient $1 + 10 = 11$. En ajoutant encore 2, il vient $1 + 12 = 13$. Visuellement, on a fait 2 tours d'horloge + 2 crans.

b. Avec $n = 11$, au bout d'un tour, on a $1 + 11 = 12$. Si on avance encore d'un cran, cela donne $1 + 12 = 13$. Cette valeur de n est la seule possible. En effet, si l'équation est vérifiée 12 vaut 1 additionné à un multiple de n , et donc n divise 11, qui est premier, donc $n = 11$.

2. **a.** C'est certain, Beethoven aurait été un compositeur modeste s'il avait été bien entendant.

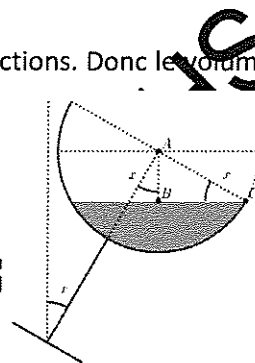
b. Un arrêté municipal interdit le ramassage des escargots. Une association demande de revenir sur cette décision. La mairie reste inflexible.

3. Avec une demi-coupe, les cotes sont diminuées de moitié dans toutes les directions. Donc le volume est divisé par 8. On peut donc remplir 8 demi-coupes avec une coupe entière.

4. On superpose le verre penché et le verre droit.

Avec les notations, on a $AB = \frac{AC}{2}$, car AC est le rayon du cercle, et car le verre est rempli à moitié.

Donc $\sin(x) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, donc l'angle maximum vaut $x = 30^\circ$.



5. **a.** Si n est supérieur ou égal à 100 et si chacun paye déjà son menu à 40 euros, cela donne $40 \cdot n$ euros qui est bien supérieur à 4000 euros : l'objectif du restaurateur est atteint et les convives n'auront pas besoin de payer davantage.

Si n est strictement inférieur à 100 et si chacun paye son menu à 40 euros, cela donne au total $40 \cdot n$ euros qui est inférieur strictement à 4000 euros. Selon les conditions du restaurateur, les convives vont devoir payer un peu plus pour que la recette atteigne bien 4000 euros. Ils payeront $4000/n$ euros par personne.

Lorsque $n = 90$, on a vu que les convives vont devoir payer chacun $4000/90$ euros. C'est compris entre 44.44 euros et 44.45 euros : chacun payera donc 44.45 euros.

b. On répartit la subvention sur les 90 convives. Selon le calcul précédent, chacun payera donc $4000/90 - 1000/90$: cela donne 33.34 euros par personne.

Lorsque 120 personnes viennent, chacun paye $40 - 1000/120$ euros (chacun paye son menu - sa part de subvention). Cela donne 31.67 euros.

Si n est supérieur ou égal à 100, le prix par convive est $40 - 1000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 100$ et vaut 30 (euros).

Si n est inférieur strictement à 100, le prix par convive est $4000/n - 1000/n$ c'est-à-dire $3000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 99$ et est supérieure à 30 (car $30 = 3000/100$).

Conclusion : le prix par convive est minimal lorsqu'il y a exactement 100 convives et le prix à payer par chacun est alors de 30 euros.

6. Notons R le rayon de la tarte. Et $x \in [0, R]$ l'endroit du bord où l'on va couper. L'aire de la portion totale de tarte vaut $\frac{\pi R^2}{4}$ et l'aire de la portion gauche de tarte vaut $\frac{x^2}{2}$. Ce dernier doit valoir la moitié de l'aire totale.

Donc $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R$.

7. On note S le sommet d'où partent les trois arêtes à angles droits, on note A, B et C les autres sommets (C étant en arrière) et enfin, on note $a = SA, b = SB$ et $c = SC$. Appelons d la hauteur issue de B du triangle oblique ABC , et H le pied de cette hauteur. L'aire au carré du triangle oblique vaut $AC^2 d^2/4$. Puis dans le triangle rectangle $HSB, d^2 = SH^2 + b^2$. Mais SH est aussi perpendiculaire à AC . Donc l'aire du triangle de base, à savoir le triangle ASC , vaut à la fois $\frac{ac}{2}$ et $\frac{SH \cdot AC}{2}$. Il reste à tout recoller puisque $AC^2 = a^2 + c^2$. Dès lors, $SH^2(a^2 + c^2) = a^2 c^2$. Et donc $d^2(a^2 + c^2) = SH^2(a^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) = a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2$.

distance de S : $1/\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix} = 1$ plan $ABC \Rightarrow \frac{1}{6} abc = |SABC| = \frac{1}{3} |ABC| \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

perpendiculaire $\Rightarrow 4|ABC|^2 = a^2 b^2 c^2 (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$

Exercice 2

1. Quelques exemples.

a. $1 + 2 + \dots + 5 = 15$ et $7 + 8 = 15$ donc 6 est équilibré de balance 2.

b. $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ et $8 + 9 = 17 < 21 < 27 = 8 + 9 + 10$.

c. On a

$$1 + 2 + 3 + \dots + 203 = \frac{203 \times (203 + 1)}{2} = 20706$$

et

$$(204 + 1) + (204 + 2) + \dots + (204 + 84) = \frac{84 \times (2 \times 204 + 84 + 1)}{2} = 20706$$

2. a. Si n est équilibré de balance b , on a :

$$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

donc

$$n^2 - n = 2bn + b^2 + b$$

On en déduit que

$$b^2 + (2n+1)b + (n-n^2) = 0$$

donc b est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $8n^2 + 1$ qui est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions qui sont

$$\frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \text{ et } \frac{-(2n+1) - \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

Comme b est un entier strictement positif, on a nécessairement $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$

On en déduit que $8n^2 + 1 = (2(n+b) + 1)^2$ donc $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

b. Comme $e^2 = 8n^2 + 1$, on a : e^2 est impair, ce qui impose que e l'est aussi. On en déduit que $b = \frac{e-1}{2} - n$ est un entier. Montrer que $b > 0$ revient à établir que $2n+1 < \sqrt{8n^2+1}$, ce qui est aisé en comparant les carrés de ces deux nombres positifs (on rappelle que $n > 1$).

c. La question 2.a donne le sens direct tandis que la question 2.b fournit la réciproque : puisque $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$ on a : b est solution de l'équation

$$x^2 + (2n+1)x + (n-n^2) = 0$$

ce qui montre que

$$b^2 + (2n+1)b + (n-n^2) = 0$$

On en déduit finalement que

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{b(2n+b+1)}{2} = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+b)$$

ce qui montre que n est un nombre équilibré de balance b .

m	n
1	0
3	1
17	6

$$\left. \begin{array}{l} 8n^2 + 1 = m^2 \Leftrightarrow \\ m^2 - 2(2n)^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} m_k + 2\sqrt{2}n_k = (3+2\sqrt{2})^k \\ m_{k+1} + 2\sqrt{2}n_{k+1} = (m_k + 2\sqrt{2}n_k)(3+2\sqrt{2}) \\ m_{k-1} + 2\sqrt{2}n_{k-1} = (m_k + 2\sqrt{2}n_k)(3-2\sqrt{2}) \end{array}$$

3. a. On calcule :

$$\left. \begin{array}{l} n_{k+1} = 3n_k + \sqrt{8n_k^2 + 1} \\ n_{k-1} = 3n_k - \sqrt{8n_k^2 + 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_{k+1} + 2\sqrt{2}n_{k+1} = (m_k + 2\sqrt{2}n_k)(3+2\sqrt{2}) \\ \quad = (3m_k + 8n_k) + 2\sqrt{2}(3n_k + m_k) \\ m_{k-1} + 2\sqrt{2}n_{k-1} = (m_k + 2\sqrt{2}n_k)(3-2\sqrt{2}) \\ \quad = (3m_k - 8n_k) + 2\sqrt{2}(3n_k - m_k) \end{array}$$

$$8f(x)^2 + 1 = 8(9x^2 + 6x\sqrt{8x^2 + 1} + 8x^2 + 1) + 1 = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9$$

et

$$(8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2 = 64x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9(8x^2 + 1) = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} + 9$$

b. Soit n un nombre équilibré. D'après la question 2.a, $f(n)$ est bien un entier. On remarque par ailleurs que, comme $n \geq 2$, on a : $f(n) \geq 2$. Enfin, d'après la question 3.a, $8f(n)^2 + 1$ est un carré parfait. D'après la question 2.b, on conclut que $f(n)$ est un nombre équilibré.

c. On sait que 6 est un nombre équilibré. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul k , $\frac{f(k)}{k} > 1$ donc $f(k) > k$. On en déduit que les nombres

$$6, f(6), f(f(6)), f(f(f(6))), \dots$$

sont des nombres équilibrés (question 3.b.) deux à deux distincts classés dans l'ordre croissant, ce qui donne le résultat.

d. On sait que $u_k = 3u_{k-1} + \sqrt{8u_{k-1}^2 + 1}$ donc $(u_k - 3u_{k-1})^2 = 8u_{k-1}^2 + 1$ ce qui donne, après simplifications : $u_{k-1}^2 - 6u_k u_{k-1} + u_k^2 - 1 = 0$ donc u_{k-1} est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $4(8u_k^2 + 1)$ qui est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions, qui sont

$$3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1} \text{ et } 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$$

Comme $u_{k-1} < u_k$, on a donc nécessairement : $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$.

e. On remarque que h est dérivable et que pour tout $x > 0$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{8x+1}} \cdot \frac{4\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8x+1}}$$

Or, $(3\sqrt{8x+1})^2 = 9(8x+1) = 72x+9 > 64x = (8\sqrt{x})^2$ donc $3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} > 0$. Comme $2\sqrt{x}\sqrt{8x+1} > 0$, on en déduit que $h'(x) > 0$. Ainsi h est strictement croissante. Pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a : $0 < x^2 < y^2$ donc, comme h est strictement croissante, $h(x^2) < h(y^2)$ donc $g(x) < g(y)$. Ainsi g est strictement croissante.

f. $u_2 = f(u_1) = f(6) = 35$. Puisque n est équilibré, on déduit du résultat admis par l'énoncé que si $n \leq 35$, alors $n = 6$ ou $n = 35$. Or, $u_1 = 6$ et $u_2 = 35$ et n n'est pas de la forme u_k . On en déduit que $n > 35$, c'est-à-dire que $n \geq u_2$. Puisque la suite d'entiers naturels $(u_k)_{k \geq 2}$ est strictement croissante, il existe un entier $m \geq 2$ tel que $u_m < n \leq u_{m+1}$. Or, puisque n n'est pas de la forme u_k , on a : $n \neq u_{m+1}$. Finalement, $u_m < n < u_{m+1}$.

On déduit de la stricte croissance de g établie à la question 3.e que $g(u_m) < g(n) < g(u_{m+1})$. Or, d'après la question 3.d, $g(u_m) = u_{m-1}$ et $g(u_{m+1}) = u_m$. D'où $u_{m-1} < g(n) < u_m$. Comme $u_m < n$, on a donc $g(n) < u_m < n$ donc $g(n) < n$.

D'après la question 3.f, $n > 35$ donc $n > 6$. Or, n est un nombre équilibré. On vérifie (comme on l'a fait avec $f(n)$) que $g(n)$ l'est aussi. On en déduit que $g(n)$ est un nombre équilibré qui ne s'écrit pas forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$. Finalement que n n'est pas le plus petit nombre équilibré ne s'écrivant pas sous forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$, ce qui est absurde par définition de n . Ainsi, tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$.

4. a. Soit $n \geq 2$ un entier. Alors $u_{k+1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1}$ et, d'après la question 3.d, $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$. Donc $u_{k+1} = 3u_k + (3u_k - u_{k-1}) = 6u_k - u_{k-1}$

b. Dans s , on calcule $s = 1 + \dots + i$ jusqu'à ce que i arrive à n (exclu). La fonction mystère (n) calcule donc la somme $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$.

→ équation quadratique en u_{k-1} avec les racines u_{k-1} et u_{k+1}

$$u_{k-1}^2 - 6u_{k-1}u_k + u_k^2 - 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{k-1} + u_{k+1} = 6u_k \\ u_{k-1} \cdot u_{k+1} = u_k^2 - 1 \end{array} \right. \text{Viète}$$

c. On déduit de la question 4.b la fonction suivante.

```
def equilibre(n):  
    k=mystere(n) #k vaut 1+2+...+(n-1)  
    s=n+1  
    i=n+2  
    while s<k:  
        s=s+i  
        i=i+1  
    return s==k
```

Dans s, on calcule $s=(n+1)+\dots+i$ jusqu'à ce que cette somme dépasse le seuil k. On regarde alors si la balance est équilibrée.

Mais on peut aussi écrire la fonction suivante, de complexité bien meilleure, en exploitant la question 4.a.

```
def equilibre(n):  
    (a,b)=(6,35)  
    while a<n:  
        (a,b)=(b,6*b-a)  
    return a==n
```

Enfin, on peut également utiliser la caractérisation 2.c.

5. On propose ici aussi deux solutions, la seconde étant plus efficace que la première.

La première fonction utilise la question 4.c.

```
def liste_equilibres(n):  
    l=[]  
    for i in range(2,n):  
        if equilibre(i):  
            l.append(i)  
    return l
```

La seconde fonction exploite encore la question 4.a.

```
def liste_equilibres(n):  
    l=[]  
    (a,b)=(6,35)  
    while a<n:  
        l.append(a)  
        (a,b)=(b,6*b-a)  
    return l
```

Remarques

La balance de 6930 est 2870.

La balance de 235416 est 97512.

La balance de 313506783024 est 129858761424.

liste_equilibres(1000000000000)

renvoie

[6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860, 1583407981, 9228778026, 53789260175, 313506783024]

Exercices 3

Identique à l'exercice 2. À la numérotation et à ceci près :

1. Méthode de Gauss

2. Par exemple en soustrayant deux sommes partant de 1 (ou bien en regroupant tous les n).

6.

```
def liste_equilibres(n)
    l = []
    u = 6
    for compteur in range(n)
        l.append(u)
        u = 3*u+sqrt(8*u**2 + 1)
    return(l)
```

INSPECTION GÉNÉRALE MATHS

Exercice 1 : Un problème d'aire qui ne manque pas d'air !

Dans un carré ABCD de côté 1, on considère une suite de cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ de centres respectifs $(O_0, O_1, \dots, O_n)$ et de rayons respectifs $(r_0, r_1, \dots, r_n)$, où n est un nombre entier naturel (voir figure 1).

Les cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ sont :

- tangents entre eux.
- tangents aux segments $[AE]$ et $[AF]$.

Le quart de cercle de centre A et de rayon 1 coupe le segment $[AE]$ en H_0 .

On définit A_n comme la **somme** des aires des disques délimités par les cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ où n est un nombre entier naturel.

Le problème consiste à calculer la **somme** A des aires de tous les disques C_k , pour $k \geq 0$.

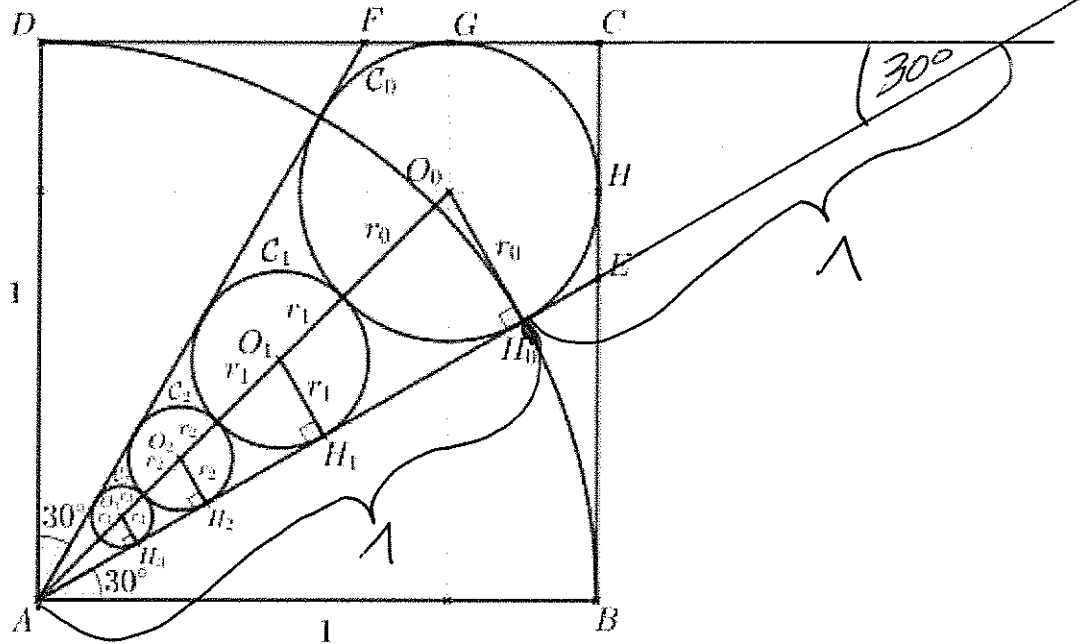


Figure 1 – Représentation géométrique partielle du problème

Partie A – Ne dépassons pas les bornes !

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement de l'aire A, comprise entre celle du disque délimité par le cercle C_0 , désignée par $A_{\min}$ et celle de la zone AECF, désignée par $A_{\max}$:

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max}.$$

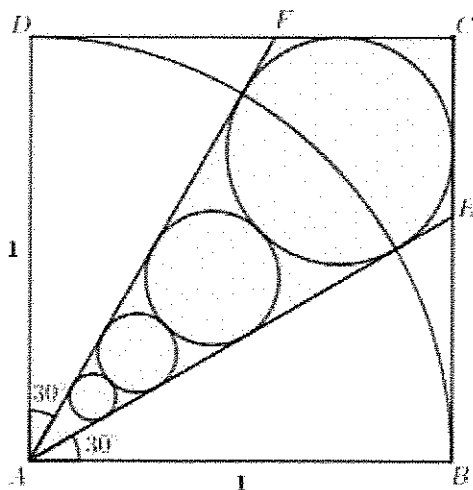


Figure 2 – Majorant : $A_{\max} = A_{AECF}$

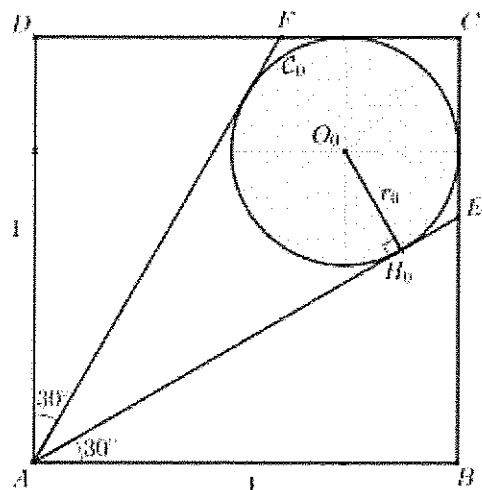


Figure 3 – Minorant : $A_{\min} = A_{C_0}$

A.1 – Recherche d'un majorant :

A.1.1 Montrer que : $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On rappelle que : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ où α est la mesure d'un angle d'un triangle rectangle.

Dans le triangle ABE rectangle en B : $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{BE}{AE}$ et $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{AE}$, ainsi :

$$\tan(30) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{\frac{BE}{\frac{1}{1}}} = \frac{BE}{\frac{AB}{1}}$$

D'où le résultat : $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A.1.2 Calculer l'aire des triangles ABE et ADF .

Les triangles ABE et ADF sont égaux et ont donc la même aire :

$$A_{ADF} = A_{ABE} = \frac{AB \times BE}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

A.1.3 En déduire la valeur exacte de l'aire A_{max} de la zone $AECF$ puis la valeur approchée par excès au centième.

L'aire recherchée correspond à la différence entre l'aire du carré $ABCD$ et la somme des aires des deux triangles ABE et ADF , ainsi :

$$A_{max} = A_{ABCD} - (A_{ABE} + A_{ADF})$$

$$A_{max} = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{max} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,4226 \dots \approx 0,43$$

A.2 – Recherche d'un minorant :

A.2.1 Calculer la longueur AC en considérant le carré $ABCD$. En déduire que :

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2}$$

Dans le triangle ABC rectangle en C , on utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$AC^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2} \approx 1,42$$

Comme $0 \leq r_0 \leq AC$, on a $0 \leq r_0 \leq \sqrt{2}$

A.2.2 Déterminer O_0C en fonction de r_0 , puis en déduire AO_0 en fonction de r_0 .

On rappelle que H_0 est le point d'intersection entre le segment $[AE]$ et le quart de cercle de centre A et de rayon 1.

Dans le triangle O_0CH rectangle en H , en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$O_0C = r_0\sqrt{2}$$

D'où

$$AO_0 = AC - O_0C$$

$$AO_0 = \sqrt{2} - r_0\sqrt{2}$$

$$AO_0 = \sqrt{2}(1 - r_0)$$

A.2.3 En considérant le triangle AH_0O_0 rectangle en H_0 , montrer que r_0 vérifie :

$$r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$$

Dans le triangle AH_0O_0 rectangle en H_0 , on utilise le théorème de Pythagore :

$$AH_0^2 + O_0H_0^2 = AO_0^2$$

$$1^2 + r_0^2 = 2(1 - r_0)^2$$

$$1 + r_0^2 = 2 - 4r_0 + 2r_0^2$$

Ainsi r_0 vérifie :

$$r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$$

A.2.4 Résoudre l'équation précédente et montrer que $r_0 = 2 - \sqrt{3}$.

L'équation précédente est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1; b = -4; c = 1$

On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} > 0$$

On obtient deux racines distinctes réelles :

$$r_0' = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$$

$$r_0'' = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26$$

D'après la question A.2.1 on sait que :

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2} \approx 1,41$$

$r_0' > \sqrt{2}$, il n'est donc pas solution.

D'après la question A.2.1 on sait que :

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$0 < r_0'' < \sqrt{2}$$

Ainsi $r_0 = r_0'' = 2 - \sqrt{3}$.

A.2.5 En déduire la valeur exacte de l'aire A_{min} du disque délimité par le cercle C_0 puis une valeur approchée par défaut au centième.

$$A_{min} = \pi \cdot r_0^2 = \pi \cdot (2 - \sqrt{3})^2 = \pi \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 0,2255 \dots \approx 0,22$$

A.3 À l'aide de ce qui précède, donner un encadrement de la somme des aires des disques, les valeurs seront données au centième.

$$A_{min} \leq A \leq A_{max}$$

On obtient ainsi, l'encadrement de la somme de toutes les aires A :

$$0,22 < A < 0,43$$

REMARQUES :

0,22 obtenu avec la question A.2.5 en prenant une valeur approchée par défaut

0,43 obtenu avec la question A.1.3 en prenant une valeur approchée par excès

Les valeurs 0,23 et 0,42 ne sont pas acceptables car l'une trop majorée et l'autre trop minorée.

Partie B – Des rayons bien rangés et bien alignés !

Dans cette partie, on s'intéressera à la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des rayons des cercles $C_n, n \in \mathbb{N}$ formant l'hypoténuse du triangle AH_0O_0 rectangle en H_0 .

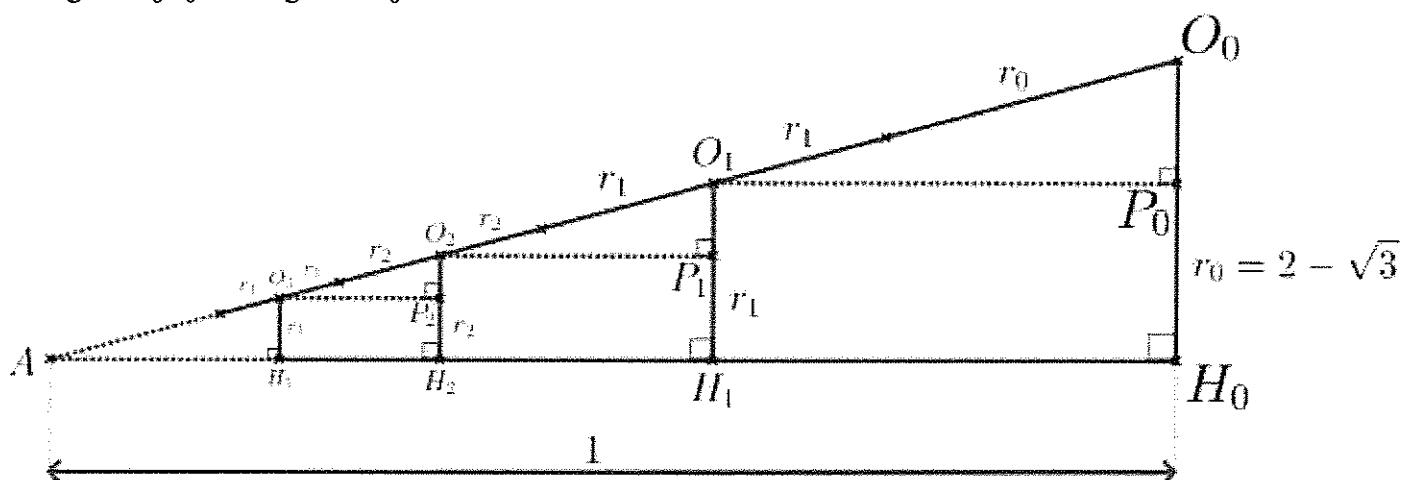


Figure 4 – Suite de triangles

B.1 En s'aidant du résultat de la question A.2.2, montrer que $AO_0 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$.

D'après A.2.2 on a $AO_0 = \sqrt{2}(1 - r_0)$ et $r_0 = 2 - \sqrt{3}$, ainsi :

$$AO_0 = \sqrt{2}(1 - 2 + \sqrt{3})$$

D'où le résultat :

$$AO_0 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$$

B.2 En remarquant que $AO_1 = AO_0 - O_1O_0$ montrer que $\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

En déduire une valeur arrondie à 10^{-4} près du rapport $\frac{r_1}{r_0}$.

Sur le segment $[AO_0]$, on a :

$$\begin{aligned} AO_1 &= AO_0 - O_1O_0 \\ AO_1 &= AO_0 - (r_0 + r_1) \\ AO_1 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} - (2 - \sqrt{3} + r_1) \\ AO_1 &= -2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1 \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{H_1O_1}{H_0O_0} &= \frac{AO_1}{AO_0} \\ \frac{r_1}{r_0} &= \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On utilise l'égalité des produits en croix :

$$r_1(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1)$$

On distribue r_0 :

$$r_1(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) - r_0 \cdot r_1$$

On factorise par r_1 :

$$r_1((\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} + r_0) = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

On substitue la valeur de r_0 dans l'égalité :

$$r_1((\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

$$r_1(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}) = (2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

D'où

$$r_1 = \frac{(2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})}{(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})} = 54 + 38\sqrt{2} - 31\sqrt{3} - 22\sqrt{6}$$

Du résultat précédent on peut déduire que :

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}} = 15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6}$$

$$\frac{r_1}{r_0} \approx 0,5888$$

B.3 Justifier que les triangles $O_i O_{i+1} P_i$ sont semblables, pour $0 \leq i \leq n$.

Les angles des triangles $O_i O_{i+1} P_i$ sont deux à deux égaux, donc les triangles sont semblables.

B.4 Exprimer les longueurs des segments $[O_i P_i]$ en fonction de r_i et r_{i+1} .

$$O_i P_i = r_i - r_{i+1}$$

Les triangles $O_i O_{i+1} P_i$ étant semblables, on a l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{O_i O_{i+1}}{O_i P_i} = \frac{O_{i+1} O_{i+2}}{O_{i+1} P_{i+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

B.5 En déduire les relations suivantes :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \dots = \frac{r_i}{r_{i+1}} = \dots = \frac{r_{n-1}}{r_n} = \frac{r_n}{r_{n+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

Pour les triangles semblables $O_i O_{i+1} P_i$ et $O_{i+1} O_{i+2} P_{i+1}$ l'égalité des rapports de longueurs peut s'écrire :

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}} = \frac{r_{i+1} + r_{i+2}}{r_{i+1} - r_{i+2}}$$

Ou encore :

$$(r_i + r_{i+1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) = (r_{i+1} + r_{i+2}) \cdot (r_i - r_{i+1})$$

En distribuant on obtient :

$$r_i r_{i+1} - r_i r_{i+2} + r_{i+1}^2 - r_{i+1} r_{i+2} = r_i r_{i+1} - r_{i+1}^2 + r_i r_{i+2} - r_{i+1} r_{i+2}$$

En simplifiant, on obtient :

$$r_{i+1}^2 = r_i r_{i+2}$$

D'où

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+2}}$$

Par récurrence sur $\mathbb{N}$, on obtiendrait les relations proposées.

B.6 À l'aide de l'égalité précédente, montrer qu'il existe un q réel tel que :

$$r_{n+1} = q \times r_n, \text{ pour } n \in N$$

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, r_n est le rayon du cercle C_n . On a ainsi établi que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

L'égalité **B.6**, on a : $\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_i}{r_{i+1}}$, pour $0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$ (idée de récurrence descendante)

Qui peut s'écrire : $r_{i+1} = \frac{r_1}{r_0} \times r_i$

En posant : $q = \frac{r_1}{r_0}$ (existence et expression de q)

Ainsi, d'après la question B.3.2, q est bien un nombre réel, et on peut écrire :

$$r_{n+1} = q \times r_n, \text{ pour } n \in N$$

B.7 En utilisant la question **B.6**, **B.2** et une valeur arrondie au dix-millième de r_2 , construire les cercles C_1 et C_2 sur la figure de l'annexe. Sur cette figure, une unité est représenté par 10 cm.

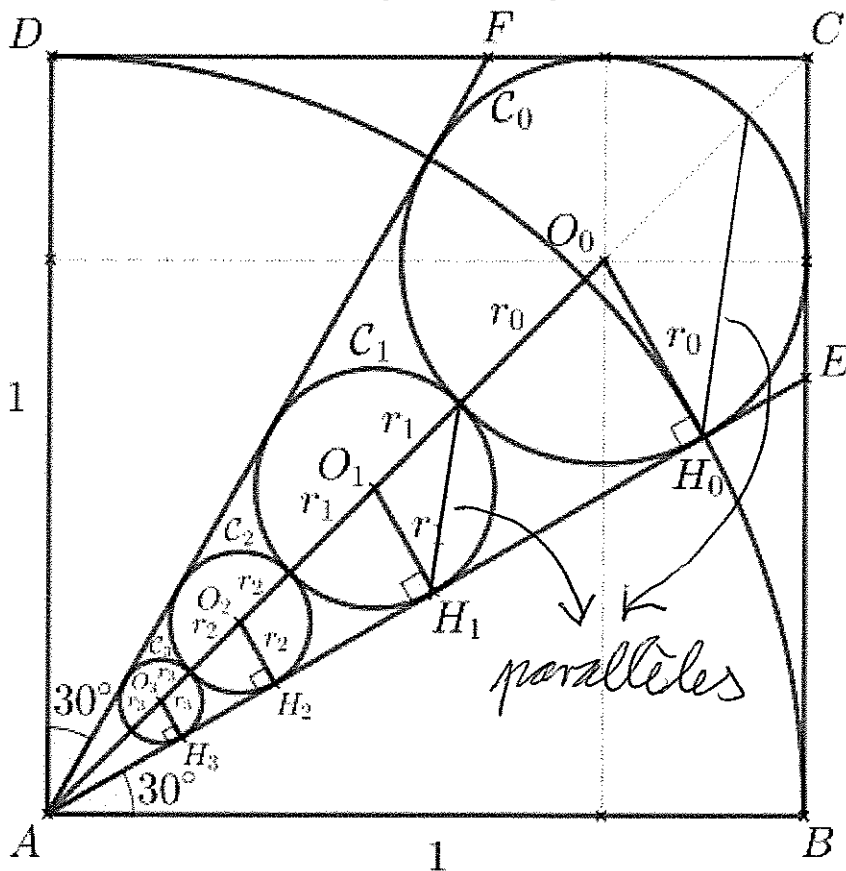
D'après **B.2** ou **B.6** on a $r_1 = q \times r_0 \approx 0,1578$, ainsi C_1 est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon 1,6 cm.

D'après B.6, on a : $r_2 = q \times r_1$, puis en remplaçant n par 2 et q par 0,5888, on obtient :

$$r_2 \approx 0,5888 \times 0,1578 \approx 0,09291$$

Ainsi C_2 est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon 0,9 cm.

Annexe : Figure à compléter



B.8 On pose $u_n = \pi(r_n)^2, n \in N$, montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison q^2 .

D'après B.6, la suite $(r_n)_{n \in N}$ des rayons des cercles $C_n, n \in N$ est géométrique, son terme général s'exprime :

$$r_n = r_0 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n$$

Exprimons le terme général au carré :

$$(r_n)^2 = (r_0)^2 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}$$

Cette suite de rayon au carré est aussi géométrique, de raison constante égale à $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2$.

B.9 Expliquer pourquoi la **somme** A des aires de tous les disques C_k , pour $k \geq 0$ vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

On rappelle pour cette question que pour une suite géométrique $(u_n)_{n \in N}$, la somme S_n des $(n+1)$ premiers termes vaut :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On peut en déduire la somme de ses termes :

$$\pi \times (r_0)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n+2}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

Pour des grandes valeurs de n on peut négliger le terme : $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n+2}$, car :

$$q = \frac{r_1}{r_0} \approx 0,5887 < 1$$

Ainsi, cette somme de termes peut s'écrire :

$$\frac{(r_0)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

On peut en déduire que la somme des aires A de tous les disques vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

$$A \approx \pi \times \frac{0,2679^2}{1 - (0,5887)^2} \approx 0,35$$

Ce résultat est cohérent car d'après A.3 : $0,22 < A < 0,43$

Correction

Partie A – Première porte

- A.1.** a) Proposer un ensemble certain d'essais.
 $\{1 - 2 ; 3 - 4\}$ est certain.
- b) Justifier qu'un seul essai ne suffit pas à ouvrir la porte pour toutes les configurations.
Il suffit que la serrure bloquante soit l'une des deux serrures choisies lors de l'unique essai pour que cet essai soit raté.
- c) En déduire que le nombre optimal d'essais est 2.
Il existe un ensemble certain à deux essais, mais aucun à un seul essai : le nombre optimal d'essais est bien 2.
- A.2.** Déterminer la probabilité que Lara réussisse à ouvrir la porte à son premier essai si elle place les clés dans des serrures choisies totalement au hasard.
Pour que la porte s'ouvre dès le premier essai il faut et il suffit que les deux serrures choisies soient fonctionnelles. Il y a ainsi 3 possibilités pour la première serrure et 2 pour la deuxième, soit 6 choix possibles pour faire un essai réussi. Puisque l'ordre dans lequel les serrures sont choisies n'a aucune importance, il y a exactement 3 essais réussis.
- Le nombre d'essais possibles est $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.
- Par équiprobabilité, la probabilité qu'un unique essai soit réussi est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Partie B – Deuxième porte

- B.1.** Dans cette question Lara tente l'ensemble d'essais $\{1 - 2 ; 3 - 4 ; 1 - 5\}$ mais ils échouent tous. Proposer des numéros où peuvent se trouver les serrures fonctionnelles.
Si les serrures 2, 4 et 5 sont fonctionnelles (et les serrures 1 et 3 bloquantes) alors les trois essais sont ratés.
- B.2.** En justifiant soigneusement, décrire un ensemble certain de quatre essais.
L'ensemble d'essais $\{1 - 2 ; 1 - 3 ; 2 - 3 ; 4 - 5\}$ est certain. En effet, si au moins deux des serrures 1, 2 et 3 sont fonctionnelles alors au moins un des trois premiers essais est réussi puisqu'on essaie toutes les combinaisons. Sinon, au plus une de ces serrures est fonctionnelle et les deux serrures fonctionnelles qui restent sont forcément 4 et 5 ce qui rend le dernier test réussi.
- B.3.** Soit E un ensemble quelconque de trois essais exactement.
- a) Justifier qu'au moins une serrure a été choisie pour au moins deux essais.
Si les deux premiers essais n'ont aucune serrure en commun, alors quatre des cinq serrures ont été testées. Le troisième essai doit alors tester au moins une de ces quatre serrures qui sera alors testée par deux essais.
- b) Démontrer qu'il existe une configuration des serrures pour laquelle les trois essais échouent.
Prenons une serrure testée par au moins deux essais, et décidons que cette serrure est bloquante. Les deux essais échouent donc. Il reste un seul essai et quatre serrures, trois fonctionnelles et une bloquante. Positionnons la deuxième et dernière serrure bloquante sur une des deux serrures testées par ce dernier essai. Les trois serrures fonctionnelles sont placées aux emplacements non encore choisis. Par construction, les

trois essais échouent, et l'on a bien construit la configuration demandée : l'ensemble E n'est pas certain.

B.4. Justifier que le nombre optimal d'essais est 4.

Tout d'abord, aucun ensemble de un ou deux essais ne peut être certain car il serait alors possible de rajouter des essais quelconques pour créer un ensemble de trois essais, certain lui aussi. Aucun ensemble de strictement moins de quatre essais n'est certain, et on a construit un ensemble certain à quatre essais : c'est donc le nombre optimal.

Partie C – Toujours plus de portes

C.1. a) Déterminer un ensemble $(3; 3)$ -certain de 6 essais.

$\{1-2; 1-3; 2-3; 4-5; 4-6; 5-6\}$. Si les trois premiers essais échouent, alors il y a au moins deux serrures bloquantes parmi 1, 2, et 3. Il ne reste donc qu'au plus une serrure bloquante dans 4, 5, et 6, ce qui fait qu'au moins un des trois derniers essais réussit.

b) Démontrer que $O(3; 3) = 6$.

Soit E un ensemble de 5 essais. Les 5 essais ne peuvent pas être deux à deux disjoints car il y a $f + b = 6 < 10$ serrures. Une des serrures est donc testée par au moins deux essais. En y plaçant une serrure bloquante, tous ces essais sont ratés et les essais qui restent forment un ensemble E' d'essais pour les cinq autres serrures. Or il reste au maximum 3 essais pour 3 serrures fonctionnelles et 2 bloquantes. L'ensemble E' n'est donc pas certain et E non plus puisqu'on rajoute deux essais ratés à la configuration qui fait rater tous les essais de E' .

En définitive, $O(3; 3) > 5$. La question précédente permet d'assurer que $O(3; 3) \leq 6$ et ainsi $O(3; 3) = 6$.

C.2. a) Démontrer que pour tout $f \geq 2$, $O(f; b) \geq b + 1$.

Soit E un ensemble $(f; b)$ -certain. Tant qu'il reste au moins une serrure bloquante à placer, il existe un essai de E dont aucune des serrures n'a été affectée car E est certain. On positionne alors une serrure bloquante sur cet essai qui est ainsi raté. Placer ensuite les serrures fonctionnelles dans les emplacements non affectés complète la configuration pour laquelle b essais sont ratés. Puisque E est certain, il y a donc au moins un essai réussi, soit au moins $b + 1$ essais au total.

b) Démontrer que si $f \geq b + 2$ alors $O(f; b) = b + 1$.

Supposons $f \geq b + 2$. Puisqu'il y a $f + b \geq 2(b + 1)$ serrures, on peut fixer un ensemble E de $b + 1$ essais deux à deux disjoints. Au plus b de ces essais contient une serrure bloquante, donc au moins un essai est réussi. On a un ensemble $(f; b)$ -certain de $b + 1$ essais donc $O(f; b) \leq b + 1$, et grâce à la question précédente $O(f; b) = b + 1$.

C.3. Compléter les informations manquantes directement sur l'annexe en suivant la logique utilisée.

	$f = 3$	$f = 4$
$b = 3$		
$b = 4$		
$b = 5$		
$b = 6$		

C.4. Démontrer que le seul ensemble $(2; b)$ -certain est la clique associée aux $b + 2$ serrures. En déduire que $O(2; b) = \frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

Soit E un ensemble $(2; b)$ -certain. Pour toute paire (a, b) de serrures, la configuration où seules a et b sont fonctionnelles ne permet qu'un seul essai réussi : $a - b$. Puisque E est certain, c'est que $a - b \in E$, et ce pour tous (a, b) . En définitive, E est la clique de tous les essais possibles, qui sont au nombre de $\frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

C.5. a) Si $b = f - 2$, proposer sans justifier un ensemble de $b + 1 = f - 1$ essais qui convient pour $E(f; b)$.

Il y a $f + b = 2b + 2$ serrures. On peut donc choisir $b + 1$ essais sans aucune serrure en commun. Ce sont bien $b + 1$ cliques disjointes, et cet ensemble est $(f; b)$ -certain car c'est l'ensemble construit en question 7.b.

b) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors la serrure $f + b + 1$ est fonctionnelle.

Si la serrure $f + b + 1$ est bloquante alors la configuration des $f + b$ premières serrures est une $(f; b)$ -configuration et au moins un essai de E est réussi.

c) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors il y a exactement une serrure fonctionnelle testée par chaque clique de E .

S'il y a plus d'une serrure fonctionnelle dans une clique de E alors cette clique abrite un essai réussi. Il y a donc au plus une serrure fonctionnelle par clique. Or E contient $f - 1$ cliques et il y a $f - 1$ serrures fonctionnelles (l'une est en position $f + b + 1$ donc hors des serrures essayées par E). Il y a donc exactement une serrure fonctionnelle par clique.

d) Construire un ensemble $E' = E(f; b + 1)$ tel que :

- E' est $(f; b + 1)$ -certain ;
- $|E'| = |E| + k$ où k est le nombre de serrures associées à la plus petite clique de E .
- E' est l'union de $f - 1$ cliques disjointes.

Démontrer soigneusement ces trois propriétés.

Prenons la plus petite clique C de E , et pour chaque serrure s associée à C ajoutons à E l'essai $s - f + b + 1$. On ajoute bien k essais qui agrandissent C en une clique associée à $C \cup \{f + b + 1\}$. Le nombre de cliques reste ainsi inchangé.

Enfin, toute $(f; b + 1)$ -configuration a soit un essai réussi dans E , soit un essai réussi entre $f + b + 1$ et la serrure fonctionnelle de C .

C.6. Dans la suite, on appellera k -clique toute clique associée à k serrures.

- a) Expliquer pourquoi si $f - 1 \leq b < 2(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$.
Tant qu'il reste des 2-cliques dans $E(f; b - 1)$, $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$ car on remplace une 2-clique par une 3-clique en ajoutant 2 essais. Or $E(f; f - 2)$ comporte $f - 1$ essais sans serrure en commun et est ainsi l'union disjointe de $f - 1$ cliques à deux serrures. On peut donc faire le remplacement indiqué $f - 1$ fois, soit de $b = f - 1$ jusqu'à $b = f - 1 + f - 2 = 2(f - 1) - 1$. On a bien le résultat demandé.
- b) Expliquer pourquoi si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.
Si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors les cliques de $E(f; b)$ sont des 3-cliques ou des 4-cliques, et il reste au moins une 3-clique, donc $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.
- c) Démontrer que si $q(f - 1) \leq b < (q + 1)(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + q + 1$.
 $E(f; q(f - 1) - 1)$ est constitué de $f - 1$ $(q + 1)$ -cliques donc les $f - 1$ constructions suivantes transforment une $(q + 1)$ -clique en $(q + 2)$ -clique jusqu'à $E(f; (q + 1)(f - 1) - 1)$ qui ne contient que des $(q + 2)$ -cliques — toujours au nombre de $f - 1$.
- d) En déduire que si $b = q(f - 1) - 1$ avec $q \geq 1$ alors :

$$|E(f; b)| = (f - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + q)$$

$$\begin{aligned} |E(f; b)| &= |E(f; f - 2)| + \sum_{i=f-1}^b (|E(f; i)| - |E(f; i - 1)|) \\ &= |E(f; f - 2)| + \sum_{k=1}^q \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} (|E(f; i)| - |E(f; i - 1)|) \\ &= |E(f; f - 2)| + \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} (k + 1) \\ &= f - 1 + \sum_{k=1}^{q-1} (f - 1) \times (k + 1) \\ &= (f - 1) \sum_{k=1}^q k \end{aligned}$$

Complément : deux tableaux révélateurs

$E(f; b)$ en fonction de f et b (en rouge les essais ajoutés) :

	$b=0$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$f=2$						K_7	K_8	K_9
$f=3$								
$f=4$								
$f=5$								
$f=6$								
$f=7$								
	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$	$b=12$			
$f=2$	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}			
$f=3$			K_7	$K_7 K_7$	$K_8 K_7$			
$f=4$								
$f=5$								
$f=6$								
$f=7$								

$O(f; b)$ en fonction de f et b :

	$b=0$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$	$b=11$	$b=12$	$b=13$	$b=14$	$b=15$
$f=2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136
$f=3$	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72
$f=4$	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	51
$f=5$	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
$f=6$	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	34
$f=7$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	21	24	27	30
$f=8$	1	2	3	4	5	6	7	9	11	13	15	17	19	21	24	27
$f=9$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$f=10$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15	17	19	21	23
$f=11$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22
$f=12$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21
$f=13$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20
$f=14$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19
$f=15$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18

Complément : $O(f; b) = |E(f; b)| = \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (q+1)(r+1)$

Supposons $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$.

Démontrons que $|E(f; b)| = \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (q+1)(r+1)$

$$\begin{aligned}
|E(f; b)| &= |E(f; q(f-1) - 1)| + \sum_{i=q(f-1)}^b (|E(f; i)| - |E(f; i-1)|) \\
&= (f-1) \sum_{k=1}^q k + \sum_{i=q(f-1)}^b (q+1) \\
&= (f-1) \times \frac{q(q+1)}{2} + (b - q(f-1) + 1)(q+1) \\
&= \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (r+1)(q+1)
\end{aligned}$$

Rappelons que si $b' \geq b$, toute restriction d'un ensemble $E' (f; b')$ -certain à $f+b$ serrures forme un ensemble $E (f; b)$ -certain. En effet, toute $(f; b)$ -configuration de ces $f+b$ serrures peut être étendue en une $(f; b')$ -configuration en ajoutant uniquement des serrures bloquantes, et pour cette configuration étendue E' doit comporter un essai réussi qui est donc nécessairement un essai de E .

Démontrons maintenant que $O(f; b) = |E(f; b)|$ pour tout $b \geq f-2$. Fixons $f \geq 2$ et notons $\mathcal{P}(b)$ la propriété plus forte suivante :

- $O(f; b) = |E(f; b)|$
- Tout ensemble $(f; b)$ -certain comporte au moins une serrure testée au moins $q+1$ fois, où $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$.

Le point crucial de cette démonstration est que la construction de $E(f; b+1)$ qui consiste à compléter la plus petite clique possible est la meilleure possible : tout ensemble certain contiendra au moins une serrure testée autant de fois que dans $E(f; b+1)$ et donc on doit avoir ajouté au moins ce nombre d'essais pour construire un ensemble $(f; b+1)$ -certain optimal à partir d'un ensemble $(f; b)$ -certain.

Démontrons $\mathcal{P}(b)$ pour tout $b \geq f-2$ par récurrence. Si $b = f-2$, on a déjà démontré $O(f; b) = b+1 = |E(f; b)|$, et bien entendu un ensemble certain n'est pas vide et comporte au moins une serrure testée au moins une fois.

Soit $b \geq f-2$. Démontrons $\mathcal{P}(b) \implies \mathcal{P}(b+1)$. Notons $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$ et supposons $\mathcal{P}(b)$.

Tout ensemble $E' (f; b+1)$ -certain peut être restreint en un ensemble $E_1 (f; b)$ -certain, et la serrure testée au moins $q+1$ fois par E_1 le sera au moins autant par E' . Mais alors la restriction E_2 aux autres serrures est $(f; b)$ -certain avec $|E'| \geq |E_2| + q+1 \geq O(f; b) + q+1$.

Si $r < f-2$ alors $b+1 = q(f-1) + (r+1)$ est la division euclidienne de $b+1$ par $f-1$, et la remarque précédente suffit à démontrer $\mathcal{P}(b+1)$ puisque $O(f; b+1) \leq |E(f; b+1)| = |E(f; b)| + q+1 = O(f; b) + q+1$ en appliquant $\mathcal{P}(b)$.

Si $r = f-2$ et E' est un ensemble $(f; b+1)$ -certain, alors on note n_s le nombre d'essais de E' testant la serrure s et $N = \max_s (n_s)$. Puisque la division euclidienne de $b+1$ par $f-1$

est $b+1 = (q+1)(f-1)$, le deuxième point de $\mathcal{P}(b+1)$ correspond à $N \geq q+2$. Démontrons le :

L'addition de tous les n_s compte deux fois chaque essai, donc $N(f+b+1) = \sum_s N \geq \sum_s n_s = 2|E'|$.

Comme vu précédemment, E' comporte au moins une serrure testée au moins $q+1$ fois et En définitive $|E'| \geq O(f; b) + q + 1 \geq \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (r+1)(q+1) + q + 1$.

En remplaçant, on obtient $N(f+b+1) \geq q(q+1)(f-1) + 2(f-1)(q+1) + 2(q+1) = (q+1)((q+2)(f-1) + 2) \geq (q+1)((q+2)(f-1) + 1)$.

Or $f+b+1 = (q+2)(f-1) + 1$ donc l'inégalité devient $N((q+2)(f-1) + 1) > (q+1)((q+2)(f-1) + 1)$ ce qui donne $N > q+1$ en divisant par $(q+2)(f-1) + 1$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Enfin, puisqu'il existe une serrure testée $q+2$ fois par E' , alors sa restriction aux autres serrures est $(f; b)$ -certain ce qui permet d'affirmer que $O(f; b+1) = |E'| \geq O(f; b) + q + 2$ en prenant E' optimal.

L'autre inégalité $O(f; b+1) \leq |E(f; b+1)| = |E(f; b)| + q + 2 = O(f; b) + q + 2$ vient en appliquant $\mathcal{P}(b)$.

On peut remarquer que $O(2; n-2)$ est la somme des n premiers entiers, que $n \mapsto O(4; n-4)$ est la suite <https://oeis.org/A130518>, $n \mapsto O(5; n-5)$ est la suite <https://oeis.org/A130519>, $n \mapsto O(6; n-6)$ est la suite <https://oeis.org/A130520>, et que plus généralement $O(f; b) = a(b-f, 1, f-1)$ où a est la suite <https://oeis.org/A214734>.

Les exemples marchent car il y a $f-1$ cliques, donc deux serrures fonctionnelles sont dans la même clique. De plus, si $b > 0$, le degré maximal m apparaît au moins 3 fois, et chaque degré vaut m ou $m-1$. Chaque graphe ayant $f+b$ sommets et une arête de moins a donc aussi un sommet de degré $\geq m$. S'il était certain, il devrait aussi marcher si ce sommet est bloquant. Et on trouverait alors un exemple qui marche pour f et $b-1$ avec m arêtes de moins. Mais cela est une contradiction dans une preuve par récurrence.