Olympiades de mathématiques

Classes de quatrième

1 L'escargot

Première solution :

La première heure l'escargot monte de 50 cm. Ensuite, il lui reste 200 cm à grimper, et toutes les deux heures, il monte de 10 cm. Comme 200 cm $\div$ 10 cm = 20 et 20 $\times$ 2 h = 40 h, l'escargot mettra 1 h + 40 h = 41 h pour atteindre le sommet du poteau.

Seconde solution :

Dès son départ, au bout de deux heures, l'escargot monte de 0,1 m. Donc au bout de 20 fois 2 heures, soit 40 heures, il parvient à 0,1 m $\times$ 20 = 2 m en ayant atteint l'altitude de 2,4 m à la fin de la $39^{ème}$ heure. Il atteint le sommet pendant la $41^{ème}$ heure. Conclusion : À la fin de la $41^{ème}$ heure il se trouve au sommet du poteau.

Pour résoudre un tel problème, il est utile de remplacer 2,5 mètres par 1 mètre, par exemple, et d'analyser complètement comment l'escargot monte et descend.

2 La sauterelle matheuse

Ce problème permet de comprendre qu'il vaut mieux travailler avec des fractions qu'avec des décimales. Si la sauterelle est placée sur le nombre 3, alors, après un bond, elle est sur b avec :

$$3 + \frac{1}{b} = 1, \text{ d'où } \quad \frac{1}{b} = -2, \text{ d'où } \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Après un bond, elle est donc sur $-1/2$. Si la sauterelle est sur le nombre 2010/2011, alors :

$$\begin{array}{rrclcrclcrcl}
\text{premier bond :} & \frac{2010}{2011} + \frac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \frac{1}{b} & = & \frac{1}{2011}, & \text{d'où} & b & = & 2011; \\
\text{deuxième bond :} & 2011 + \frac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \frac{1}{b} & = & -2010, & \text{d'où} & b & = & -\frac{1}{2010}; \\
\text{troisième bond :} & -\frac{1}{2010} + \frac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \frac{1}{b} & = & \frac{2011}{2010}, & \text{d'où} & b & = & \frac{2010}{2011}.
\end{array}$$

Après un bond, la sauterelle est donc sur 2011, et après trois bonds, elle est de nouveau sur 2010/2011. Enfin, dans le cas général, on procède de la même façon :

$$
\begin{array}{rrclrcllrcl}
\text{premier bond :} & a+\dfrac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \dfrac{1}{b} & = & 1-a, & \text{d'où} \quad b & = & \dfrac{1}{1-a}; \\[2ex]
\text{deuxième bond :} & \dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \dfrac{1}{b} & = & \dfrac{-a}{1-a}, & \text{d'où} \quad b & = & 1-\dfrac{1}{a}; \\[2ex]
\text{troisième bond :} & 1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} & = & 1, & \text{d'où} & \dfrac{1}{b} & = & \dfrac{1}{a}, & \text{d'où} \quad b & = & a.
\end{array}
$$

Pour les experts en géométrie projective, signalons que $x \mapsto 1/(1-x)$ est une transformation de Möbius d'ordre trois telle que $\infty \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto \infty$.

3 La bissectrice

Comme CBD est un triangle isocèle en D,

$$\widehat{CBA} = \widehat{DCB}.$$

Comme CD est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, nous avons

$$\widehat{ACB} = 2 \times \widehat{DCB}.$$

Par conséquent,

$$\widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 3 \times \widehat{DCB}.$$

Mais

$$\widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

On en déduit

$$120^\circ = 3 \times \widehat{DCB}, \text{ d'où } \quad 40^\circ = \widehat{DCB}.$$

Finalement, nous trouvons donc

$$\widehat{CBA} = 40^\circ, \quad \widehat{ACB} = 80^\circ.$$

Réciproquement, un tel triangle convient. En effet, en désignant par D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ et du côté $[AB]$, nous avons

$$\widehat{CBA} = \widehat{DCB} = 40^\circ.$$

Le triangle CBD est donc bien isocèle en D, c'est-à-dire $CD = BD$.

4 Arbre de Pythagore

Tout carré donne naissance à deux plus petits dont la somme des aires est égale à l'aire du carré initial (théorème de Pythagore). Comme l'aire du carré initial est 16 m^2, tant que les nouveaux carrés ne se recouvrent pas, c'est-à-dire jusqu'au $5^{ème}$ jour, l'augmentation de l'aire est égale à celle de l'augmentation précédente donc 16 m^2. Ainsi l'aire aux jours 1, 2, 3, 4, 5 est respectivement 16 m^2, 32 m^2, 48 m^2, 64 m^2, 80 m^2. Au $6^{ème}$ jour il y a un recouvrement qui fait perdre 1 m^2 d'augmentation, l'aire au $6^{ème}$ jour est alors 95 m^2. C'est un problème toujours ouvert de la recherche mathématique de calculer l'aire de l'arbre de Pythagore à tous les jours suivants, voir :

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Pythagore`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras_tree`

Comme on voit sur la feuille de papier quadrillé, la hauteur de l'arbre aux jours 1, 2, 3, 4, 5, 6 vaut exactement 4 m, 8 m, 10 m, 12 m, 13 m, 14 m, respectivement.

Après 2 jours, l'arbre est à 8 m du plafond des 16 m.
Après 4 jours, l'arbre est à 4 m du plafond des 16 m.
Après 6 jours, l'arbre est à 2 m du plafond des 16 m.
Après 8 jours, l'arbre est à 1 m du plafond des 16 m.
Après 10 jours, l'arbre est à 1/2 m du plafond des 16 m.
Après 12 jours, l'arbre est à 1/4 m du plafond des 16 m.
Après 14 jours, l'arbre est à 1/8 m du plafond des 16 m etc.

Puis on ajoute toujours la moitié de ce qui reste pour aller jusqu'à 16 m, donc il reste toujours quelque chose.

De la même façon, on démontre que la largeur de l'arbre de Pythagore n'atteindra jamais 24 m. Son aire est donc forcément plus petite que 16 m $\times$ 24 m = 384 m^2. En particulier, l'aire ne peut pas augmenter chaque jour de 16 m^2.