Olympiades de mathématiques 2012

Classes de quatrième

1 Le grand écart

Si la longueur des jambes du danseur est x, alors la longueur du segment joignant ses talons vaut soit $3 \times x$ soit $x/3$. Comme $x + x < 3 \times x$, les jambes du danseur sont trop courtes pour le grand écart $3 \times x$. Le périmètre du triangle vaut donc

$$x + x + x/3 = 210.$$

Par conséquent,

$$3x + 3x + x = 3 \times 210, \qquad 7x = 3 \times 210, \qquad x = 3 \times 210/7, \qquad x = 3 \times 30, \qquad x = 90.$$

Chaque jambe du danseur a donc forcément une longueur de 90 cm.

2 Le carrelage

Pour des raisons de symétrie, l'aire d'un petit carreau élémentaire est égale à l'aire du carré $ABCD$. Mais l'aire de $ABCD$ vaut 4 fois l'aire du triangle OAB qui est rectangle en O. On peut considérer que $OA = 3$ est sa base et $OB = 3$ est sa hauteur. L'aire de OAB vaut donc $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$. Finalement, l'aire de $ABCD$ vaut $4 \times \frac{9}{2} = 18$, et l'aire du motif vaut $4 \times 18 = 72$ cm^2.

On peut également utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer que l'aire de $ABCD$ vaut $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.

3 Les fractions

Un calcul classique nous fournit la solution

$$A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Mais il est encore plus facile de se rappeler que *l'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction avec le même nombre* :

$$\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 1}{3 \times (1+\frac{2}{3})} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

Cette idée nous permet de simplifier notre preuve :

$$A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{3}{3+2} + \frac{2}{2+3} = \frac{3+2}{3+2} = 1.$$

De même,

$$B = \frac{1}{1+\frac{3}{7}} + \frac{1}{1+\frac{7}{3}} = \frac{7}{7+3} + \frac{3}{3+7} = \frac{7+3}{7+3} = 1,$$

$$C = \frac{1}{1+\frac{a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{b}{b+a} + \frac{a}{a+b} = \frac{b+a}{b+a} = 1,$$

et

$$D = \frac{1}{1+\frac{a}{b+c}} + \frac{1}{1+\frac{b}{c+a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{a+b}} = \frac{b+c}{b+c+a} + \frac{c+a}{c+a+b} + \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{2\times(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Remarque : Si a, b, c et d sont quatre nombres strictement positifs tels que $a/b < c/d$, alors

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}, \qquad \text{mais} \qquad \frac{c}{d} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

Cette inégalité *des mauvais élèves* est intuitivement claire, si l'on représente chaque fraction y/x avec $x, y > 0$ par un point dont l'abscisse et l'ordonnée valent x et y, respectivement. On peut aussi donner une preuve formelle : $a(b+d) < b(a+c)$, car $ad < bc$. De même, $d(a+c) < c(b+d)$, car $da < cb$.

4 Le café chaud

Première solution :

a) Marie a bu 180 mL de café, car elle l'a tout bu et n'en a pas rajouté.

b) Marie a bu autant de lait que de café. En effet, elle en a bu 180 mL, car elle a rajouté $\frac{1}{6}$ de lait, ensuite $\frac{1}{3}$, et enfin $\frac{1}{2}$, ce qui donne $\frac{1+2+3}{6} = 1$, soit 180 mL.

Seconde solution :

D'abord, Marie boit un sixième, c'est-à-dire 30 mL de café. Ensuite, elle a 150 mL de café et 30 mL de lait dans sa tasse, et elle en boit un tiers, soit 50 mL de café et 10 mL de lait. Après cela, elle a 100 mL de café et $20 + 60 = 80$ mL de lait, et elle en boit la moitié, soit 50 mL de café et 40 mL de lait. Finalement, elle a 50 mL de café et $40 + 90 = 130$ mL de lait, ce qu'elle boit d'un seul trait.

Au total, Marie a donc bu $30 + 50 + 50 + 50 = 180$ mL de café et $10 + 40 + 130 = 180$ mL de lait.