Olympiades de mathématiques 2013

Classes de quatrième

1 La tablette de chocolat

1. Comme 3 est le Plus Grand Commun Diviseur de 3 et de 6 ($\text{pgcd}(3, 6) = 3$), nous pouvons considérer que Diane coupe 3 tablettes de chocolat dont chacune a 1 rangée de 2 carreaux. Par conséquent, Diane coupe 3 fois 2 carreaux, c'est-à-dire 6 carreaux au total.

2.1. Puisque $\text{pgcd}(9, 10) = 1$, nous ne pouvons pas considérer que Lilia coupe plusieurs tablettes de chocolat : Si nous traversons la diagonale de gauche à droite, nous ne tombons jamais simultanément sur une nouvelle colonne (rangée) et sur une nouvelle ligne, sauf à la fin. Mais chaque fois quand Lilia arrive avec son couteau à une nouvelle ligne ou à une nouvelle colonne, elle a coupé un carreau supplémentaire. C'est pourquoi elle a coupé $9 + 10 - 1 = 18$ carreaux. En effet, à la fin, elle arrive simultanément à la dernière ligne et à la dernière colonne et ne coupe pas 2 mais seulement 1 carreau.

2.2. Puisque $\text{pgcd}(2012, 2013) = 1$, le même raisonnement montre que Lilia a coupé $2012 + 2013 - 1 = 4024$ carreaux.

2.3. Cette fois-ci, $\text{pgcd}(2012, 2000) = 4$. On peut donc considérer que Lilia coupe 4 tablettes de chocolat dont chacune a 503 rangées de 500 carreaux. Par conséquent, Lilia coupe 4 fois $503 + 500 - 1 = 1002$ carreaux, c'est-à-dire 4008 carreaux au total.

Remarque : En général, soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. On peut alors considérer que Lilia coupe d tablettes de chocolat dont chacune a a/d rangées de b/d carreaux. Par conséquent, Lilia coupe d fois $(a/d) + (b/d) - 1$ carreaux, c'est-à-dire $a + b - d = a + b - \text{pgcd}(a, b)$ carreaux au total. De façon équivalente, on peut dire que Lilia tombe $\text{pgcd}(a, b)$ fois simultanément sur une nouvelle ligne et une nouvelle colonne.

2 Le code

1. Le troisième chiffre du code est 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8 ou 9. Il y a donc 8 possibilités pour ce chiffre. Mais dès qu'on a choisi le troisième chiffre, il ne restent que 7 possibilités pour le quatrième (dernier) chiffre. Cela fait un total de $8 \times 7 = 56$ codes possibles.

2. Pour que la somme des quatre chiffres soit à la fois un multiple de 4 et de 6, il faut et il suffit que cette somme est divisible par 12. La somme minimale est $4 + 6 + 0 + 1 = 11$ et la somme maximale est $4 + 6 + 9 + 8 = 27$. Les deux sommes possibles sont donc 12 et 24. Mais $4 + 6 + a + b = 12$ veut dire $a + b = 2$. Les deux codes possibles sont alors 4620 et 4602 (étant donné que 4611 n'a pas quatre chiffres distincts). Enfin, $4 + 6 + a + b = 24$ veut dire $a + b = 14$.

Les deux codes possibles sont alors 4695 et 4659 (étant donné que 4686, 4677, 4668 n'ont pas quatre chiffres distincts). Claire devra donc essayer les quatre codes 4620, 4602, 4695, 4659.

3 Les droites équitables

1. Une symétrie par rapport à O démontre qu'il faut et il suffit de tracer une droite passant par O.

2. Soit O le centre du rectangle, c'est-à-dire le point d'intersection de ses diagonales. Une symétrie par rapport à O démontre qu'il faut et il suffit de tracer cinq droites passant par O.

3. Le point d'intersection de AC et BD (des diagonales) est un centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$. Une symétrie par rapport à ce centre démontre qu'une droite est équitable pour $ABCD$ si et seulement si elle passe par ce centre. Pour que cette droite soit également équitable pour $EFGH$, il faut et il suffit qu'elle passe encore par le point d'intersection de EG et FH (des diagonales).

4 Multiplier des entiers

1.1. Nous avons effectivement $(9-10)(9-11) = (-1)(-2) = 2$.

1.2. On peut également prendre $2 \times 1 = 2$, c'est-à-dire $(9-7)(9-8) = 2$. Puisque $7 < 8$, $a = 7$ et $b = 8$ est bien une autre solution.

2.1. Pour décomposer 30 en cinq facteurs distincts, on pense d'abord à $30 = 2 \times 3 \times 5$, mais on peut encore y rajouter les facteurs 1 et -1 tout en remplaçant l'un des nombres 2, 3, 5 (ou tous les trois) par le nombre négatif correspondant. Cela donne les quatre solutions suivantes :

	(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)(9-e)=30	a	b	c	d	e
(1)(-1)(-2)(-3)(-5)=30	(9-8)(9-10)(9-11)(9-12)(9-14)=30	8	10	11	12	14
(3)(2)(1)(-1)(-5)=30	(9-6)(9-7)(9-8)(9-10)(9-14)=30	6	7	8	10	14
(5)(2)(1)(-1)(-3)=30	(9-4)(9-7)(9-8)(9-10)(9-12)=30	4	7	8	10	12
(5)(3)(1)(-1)(-2)=30	(9-4)(9-6)(9-8)(9-10)(9-11)=30	4	6	8	10	11

2.2. On ne peut pas décomposer $8 = 2 \times 2 \times 2$ en cinq facteurs distincts. En effet, on peut rajouter les facteurs 1 et -1 et remplaçer un facteur 2 par -2, mais le facteur 2 reste alors toujours deux fois, ce qui est interdit. D'autre part, en remplaçant 2×2 par 4, on n'obtient plus les cinq facteurs cherchés.