Olympiades de mathématiques 2014

Classes de quatrième

1 Les Banques

a) Après un an, Mathilde aurait $100 + 100 \times 4/100 = 100 \times (1 + 0,04) = 100 \times 1,04 = 104$ euros. Après deux ans, Mathilde aurait donc $104 \times 1,02 = 106,08$ euros.

b) À la Banque Quise, Mathilde aurait également $100 \times 1,02 \times 1,04 = 106,08$ euros dans deux ans.

c) À la Banque Root, cependant, Mathilde aurait $100 \times 1,03 \times 1,03 = 106,09$ euros dans deux ans. On remarque que $1,04 \times 1,02 = (1,03 + 0,01)(1,03 - 0,01) = 1,03^2 - 0,01^2 = 1,0609 - 0,0001 = 1,0608$, ce qui explique bien pourquoi Mathilde aurait une centime de plus à la Banque Root qu'aux deux autres banques.

2 Magique

a) et b) On peut commencer par remplir les diagonales pour trouver les exemples :

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

1	3	4	5	2
3	2	5	1	4
5	4	3	2	1
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

c) Supposons que Cécile place le nombre c au centre. On doit retrouver ce nombre c dans la première ligne, car chaque nombre entre 1 et 3 doit y apparaître. Mais cela entraine la présence de deux nombres c sur l'une des diagonales ou sur la colonne du milieu. La construction est donc impossible.

3 La Maison

a) $\widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = 60° + 90° = 150°$, car ABE est un triangle équilatéral et $BCDE$ est un carré.

b) La somme des mesures des deux autres angles du triangle ABC vaut $30°$, car la somme des mesures des trois angles d'un triangle vaut toujours $180°$. Or, les deux autres angles du triangle ABC ont la même mesure, car le triangle ABC est isocèle en B ($BA = BC$). La mesure de chacun des deux autres angles du triangle ABC est donc $15°$.

c) De même, $\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = 15°$ de sorte que

$$\widehat{ABC} = 150°, \quad \widehat{BCD} = 90°, \quad \widehat{CDA} = 90° - 15° = 75°, \quad \widehat{DAB} = 60° - 15° = 45°.$$

d) Soit F le milieu de EB, et soit G le milieu de CD de sorte que A, F et G forment l'axe de symétrie de la maison $ABCDE$. Comme AF est une hauteur du triangle équilatéral ABE, son aire vaut $EB \times AF/2$. Nous connaissons déjà $EB = 2\ m$ et nous pouvons calculer AF grâce au théorème de Pythagore. En effet, ABF est rectangle en F et $AB = 2\ m$ et $BF = 1\ m$. Par conséquent, $AF^2 = AB^2 - BF^2 = 3\ m^2$ et $AF = \sqrt{3}\ m$. Finalement, l'aire de ABE vaut $\sqrt{3}\ m^2$.

e) L'aire du triangle ABC est égale à l'aire du triangle GBC, car ces deux triangles ont la même base $BC = 2\ m$ et la même hauteur $CG = 1\ m$. Cette aire vaut donc $2\ m \times 1\ m/2 = 1\ m^2$.

Une autre façon de calculer l'aire du triangle ABC est la suivante. L'aire de la maison $ABCDE$ est la somme de l'aire du triangle équilatéral ABE et du carré $BCDE$, soit $(4+\sqrt{3})\ m^2$. En enlevant l'aire du triangle ACD, soit $CD \times (GF + FA)/2 = (2 + \sqrt{3})\ m^2$, on obtient $2\ m^2$ pour la somme de l'aire du triangle ABC et du triangle DEA. Comme ces deux triangles sont symétriques par rapport à la droite passant par A, F et G, ils ont la même aire, soit $1\ m^2$.

4 Nul en Maths

Supposons que dix élèves n'aimant que le foot ont tous 20 en maths, dix élèves n'aimant que le ski ont également tous 20 en maths, tandis que dix élèves aimant à la fois le ski et le foot ont tous 0 en maths (si l'on fait trop de sport, on n'a plus de temps pour les maths). Dans ce cas, la moyenne des amateurs de foot vaut

$$(20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}20{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0{+}0)/20 = (20{\times}10)/20 = 10$$

et la moyenne des amateurs de ski vaut également 10. La moyenne de toute la classe, cependant, vaut

$$(20 + \cdots + 20 + 0 + \cdots + 0)/30 = (20 \times 20)/30 = 40/3 = 13,333...$$

et Mme Mathix peut tout à fait avoir raison.