

Olympiades académiques

Session 2002

Mars 2002

Exercice 1 : les fourmis

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50cm de long.

La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne, puis, sa mission accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.

Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

Exercice 2 : le tétraèdre

On considère un tétraèdre $SABC$.

1. Soit P un plan quelconque non parallèle aux faces (SAB) , (SBC) et (SAC) du tétraèdre et les coupant respectivement suivant les droites $(A'B')$, $(B'C')$ et $(A'C')$.

On désigne par v le volume du tétraèdre $SABC$ et par v' celui du tétraèdre $SA'B'C'$.

Etablir la relation :

$$\frac{v'}{v} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA \times SB \times SC}$$

(On pourra étudier le cas où $C = C'$.)

2. Soit M un point de $[SA]$ et I le milieu de $[SC]$. Le plan R parallèle au plan (ABC) mené par M coupe (SB) en N et (SC) en Q .

On désigne par P le symétrique de Q par rapport à I .

- (a) On suppose que M est le milieu de $[SA]$. Exprimer le volume de $SMNP$ en fonction de celui de $SABC$.
- (b) Y-a-t-il d'autres façons de choisir le point M sur $[SA]$ pour que le volume de $SMNP$ soit le même ?

Exercice 3 : la table ronde

Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.

Dix jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard aux dix personnes.

Chaque personne gagne une somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de celui de son voisin de droite.

1. Donner un exemple de répartition des jetons. Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces dix gains.
2. Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 euros.
3. Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18.
4. Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

Exercice 4 : le damier

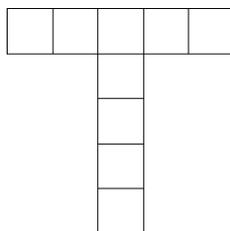
On dispose :

- d'un damier carré de 10×10 petits carrés identiques.
- d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :

- chaque exemplaire peut être tourné ou retourné
- chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier.
- deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1. Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-dessous :



2. Montrer que quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.
3. Peut-on dans la question précédente remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc. ?