

session 2004

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

CLASSE DE PREMIERE

MERCREDI 24 MARS 2004

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

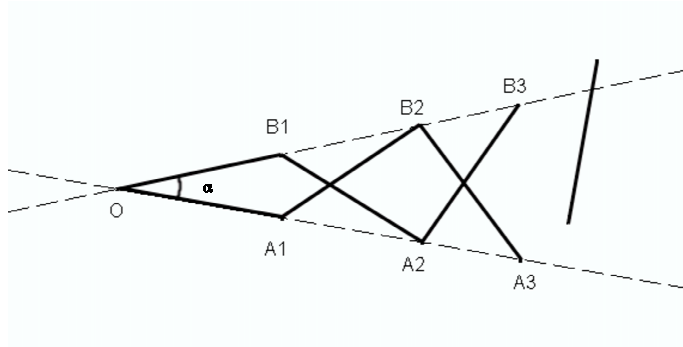
Ce sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés seront pris en compte, même s'ils ne conduisent pas à une solution.

Exercice 1

On dispose de 7 allumettes, toutes de même longueur, qu'on assimilera pour l'occasion à 7 segments de même longueur, disposées comme indiqué sur le dessin.

La septième allumette n'a pas encore trouvé sa place. Trouver la valeur de l'angle α pour que cette septième allumette relie exactement A_3 et B_3 .



O, A_1, A_2 et A_3 sont alignés.
 O, B_1, B_2 et B_3 sont alignés.

Et si on disposait de $2n+1$ allumettes, peut-on généraliser ?

Exercice 2

On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x + b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3. A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?

Exercice 3

Soit N le nombre qui s'écrit (en base dix) en juxtaposant, dans l'ordre, les 2004 premiers naturels :

$$N = 12345 \dots 9101112 \dots 2001200220032004$$

1. Quel est le nombre de chiffres de N ?
2. Quel est le chiffre qui occupe la 2004^{ième} place, en partant de la gauche ?
3. Combien de "4" sont utilisés pour écrire N ?

Exercice 4

Soit $ABCD$ une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-dessous. Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$, $AT = y$.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x .
2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

