session 2006

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 15 MARS 2006

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
L'usage de la calculatrice est autorisé

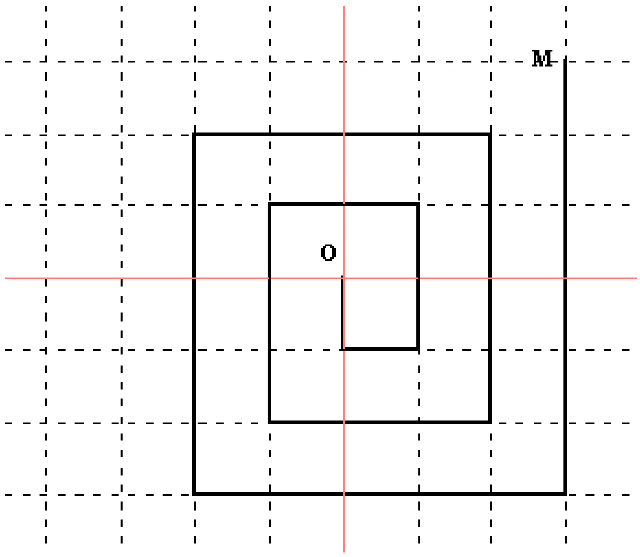
Ce sujet comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés seront pris en compte, même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : la spirale

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.

Pour tout point M à coordonnées entières, on note $l(M)$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1. Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$.
   Déterminer les valeurs possibles de $l(A)$.
2. Soit B le point de coordonnées $(2005\,;\,2006)$.
   Déterminer $l(B)$.
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $l(C) = 2006$.
4. La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

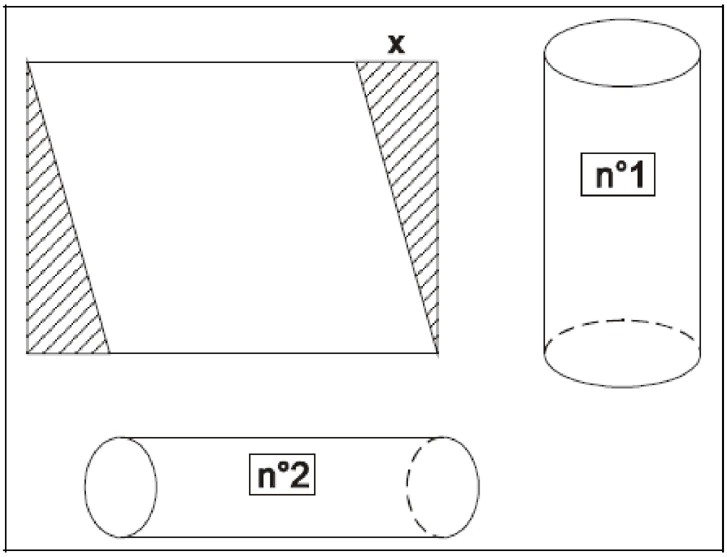
$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul } 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.

   Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



   Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

   Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 3 : la grille

On écrit dans l'ordre les entiers naturels de 0 à $n^2 - 1$, ($n \in \mathbb{N}^*$) dans un tableau C_n disposés comme dans C_4 ci-dessous.

1. On choisit, dans C_4, quatre entiers naturels de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul entier naturel dans chaque ligne et dans chaque colonne comme l'indique l'exemple ci-dessous.
   (a) Quelle est la somme S_4 de ces nombres ?
   (b) Combien y a-t-il de choix différents ?
   (c) Montrer que, quel que soit le choix, la somme est constante.

$\boxed{12}$	13	14	15
8	9	$\boxed{10}$	11
4	5	6	$\boxed{7}$
0	$\boxed{1}$	2	3

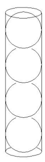
2. On construit C_4' à partir de C_4 en modifiant l'ordre des colonnes et on procède comme précédemment.
   (a) La somme est-elle modifiée ? Expliquer la réponse.
   (b) On construit alors C_4'' en modifiant l'ordre des lignes de C_4'. La somme est-elle modifiée ? Expliquer la réponse.
3. On construit le carré γ, de 17 lignes et 17 colonnes de la même façon que précédemment en partant de $1717+1$ que l'on écrit à la place du zéro de C_{17}.
   (a) Quel est le dernier entier naturel écrit ?
   (b) On choisit 17 nombres dans γ, comme précédemment, de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul entier naturel dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quelle est la somme S de ces nombres ?
4. Montrer que la somme S_n est constante dans le carré C_n et calculer S_n en fonction de n.

Exercice 4 : les boîtes

Pour vendre ses balles de tennis *super-sport-compet* par lots de 4, un commerçant décide de les ranger dans des boîtes. Il a le choix entre des boîtes cylindriques, parallélépipédiques ou prismatiques comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

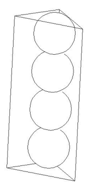
Il souhaite, de plus, minimiser la surface de matière utilisée (dont l'épaisseur sera supposée négligeable) pour la confection de ces boîtes (couvercle et fond compris). On assimilera une balle de tennis à une boule de rayon R.

1. Dessiner un patron de chacune des quatre boîtes.
2. Quelle boîte le commerçant devra-t-il choisir ?
3. Classer les quatre emballages dans l'ordre croissant des surfaces de matière utilisée.
4. Un concurrent propose un autre modèle de boîte, noté S, en forme de parallélépipède rectangle contenant les quatre boules disposées en pile : trois boules tangentes deux à deux et posées sur la base et la quatrième posée sur les trois premières, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Où se place la boîte S dans la liste précédente ?



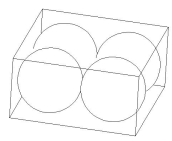
Cylindre

Modèle M



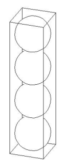
Prisme
à base triangle
équilatéral

Modèle H



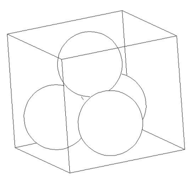
Parallélépipède
à base carrée

Modèle T



Parallélépipède
à base carrée

Modèle A



Modèle S