session 2007

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 14 MARS 2007

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
Les candidats de la série S traiteront *«l'Exercice 4 Série S»*,
les candidats des autres séries traiteront *«l'Exercice 4 Autres séries»*
L'usage de la calculatrice est autorisé

Ce sujet comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut. Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

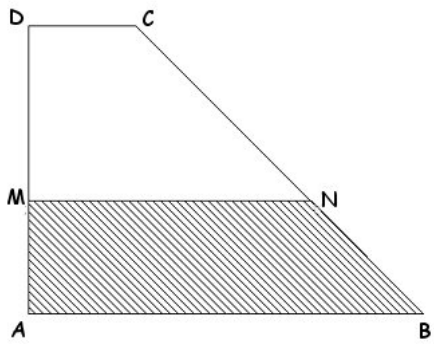
1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7). Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?
2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
   Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.
3. Paul et Virginie jouent ensemble.
   Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie.
   Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
   Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions. Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelles répartitions finales a-t-elle vues ?

Exercice 2 : Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une droite parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :
   Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que :
   $m^2 - p^2 = 8$?
   En existe-t-il plusieurs ?
   (*Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter*).
2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases [AB] et [CD] tels que :
   - $\widehat{\text{ABC}} = 45^\circ$
   - Les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD$>$2.

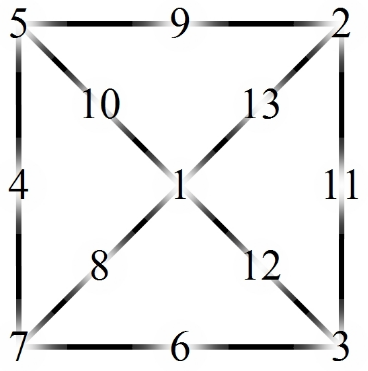
   Soit M le point du segment [AD] tel que AM $= 2$.



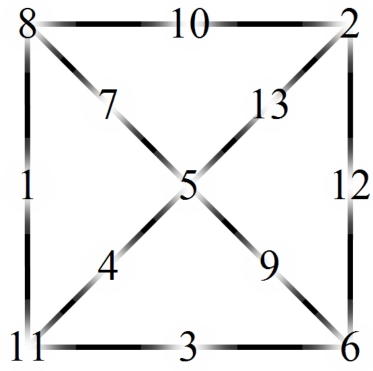
Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.
Indication : *On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.*

Exercice 3 : Tableaux de nombres

Dans les deux tableaux ci-dessous figurent tous les nombres entiers naturels de 1 à 13. On considère les quatre triangles ayant comme sommet commun le centre du carré. Les huit sommes des trois nombres placés sur un même côté de chacun de ces triangles sont égales.

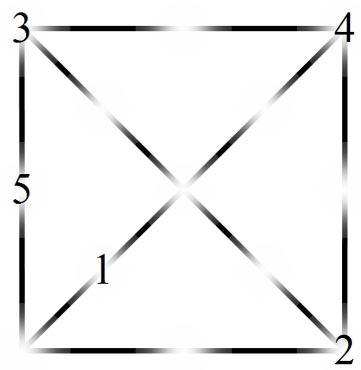


Dans cet exemple la somme associée vaut 16



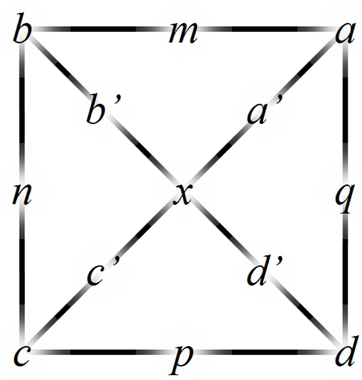
Dans cet exemple la somme associée vaut 20

Dans ce problème on s'intéresse à des tableaux de cette sorte appelés tableaux T.



1. (a) Dans le tableau T ci-contre , on a placé 1, 2, 3 , 4 et 5. Placez 6 et 7.
   (b) Complétez le tableau.
   (c) Un tableau T étant donné, on change chaque nombre z de ce tableau en $14 - z$. Obtient-on un tableau T ?
   (d) Donnez un tableau T de somme associée 23.
2. (a) Le tableau ci-contre est un tableau T. Prouver que :
   * $m + p = n + q$;
   * la somme associée est comprise entre 16 et 26 ;
   * le nombre central x est impair.

   (b) Dans un tableau T on a : $m = 12$, $n = 10$, $q = 13$ et $x = 9$.
   Compléter le tableau. Expliquez brièvement votre démarche.
   (c) Dans un tableau T, on a $n = 10$ et $q = 13$.
   Trouver m et p (avec $m > p$) puis x. Conclure.

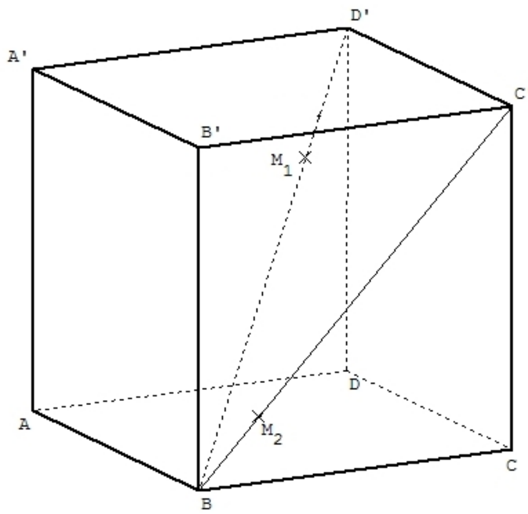


Exercice 4 - série S : Mouvement dans un cube

Dans la figure ci-dessous on a représenté un cube ABCDA'B'C'D'.

Les points M_1 et M_2 se déplacent à des vitesses constantes. M_1 parcourt le segment [D'B] de D' vers B, M_2 parcourt le segment [BC'] de B vers C'. M_1 et M_2 commencent à se déplacer au même instant et M_1 atteint B à l'instant où M_2 atteint C'.

Quelle est la valeur minimale de la distance M_1M_2 ?



Exercice 4 - autres séries : à chacun son caractère !

Alain, Bob, Carlos, Dimitri et Émile sont cinq amis. Deux d'entre eux mentent toujours (les menteurs), deux autres disent toujours la vérité (les véridiques), quant au dernier (le versatile), il dit la vérité ou il ment selon les jours.

Leur jeu favori consiste à essayer de faire deviner à un inconnu qui, dans leur groupe, est menteur, qui est véridique et qui est versatile. Aujourd'hui, chacun d'entre eux prononce une unique phrase.

Alain : *« Bob dit vrai »*
Bob : *« Émile ment »*
Carlos : *« Je ne suis pas versatile »*
Dimitri : *« Je ne dis pas systématiquement la vérité »*
Émile : *« Aujourd'hui un nombre impair de personnes ont dit vrai »*

Qui est le versatile ? Qui sont les menteurs ? Qui sont les véridiques ?