session 2008

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 12 MARS 2008

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants
L'usage de la calculatrice est autorisé

Ce sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$$2 = 1 + 1 \text{ et } \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$$

donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

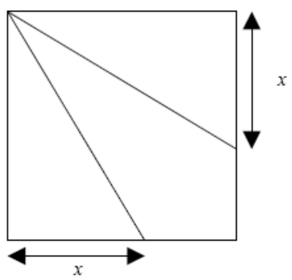
$$3 = 1 + 2 \text{ et } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$$

$$3 = 1 + 1 + 1 \text{ et } \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$$

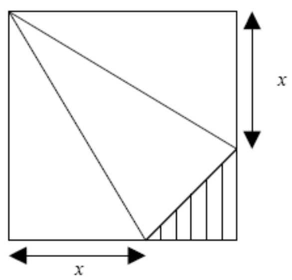
donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ». Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

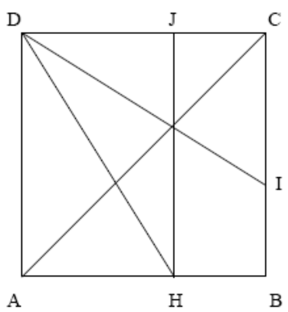
Un partage équitable



1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre. Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires. Peuvent-elles avoir la même aire ?

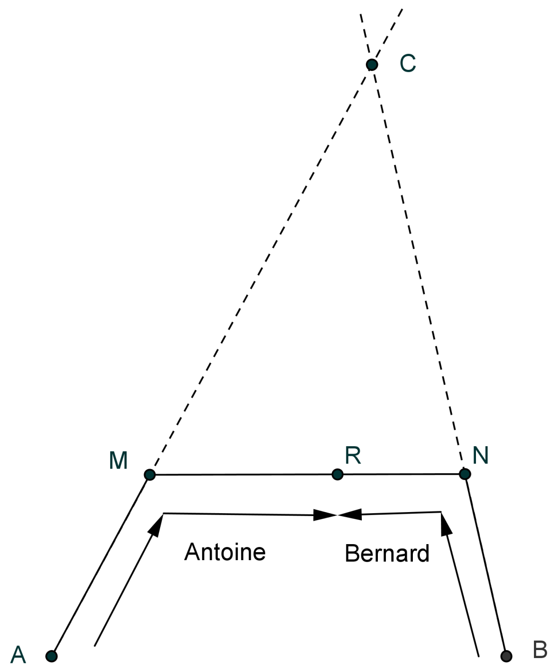


3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes. Qu'en est-il ?

Les promeneurs

Deux amis randonneurs, Antoine et Bernard sont partis à la même heure, l'un de A et l'autre de B et se dirigent vers C. Chacun marche à sa propre allure, constante, et leurs allures respectives sont telles qu'ils arriveraient en même temps en C. En cours de route ils s'aperçoivent, quittent leurs chemins, et se dirigent alors l'un vers l'autre à travers champs sans changer leurs allures respectives et se rejoignent en R.(voir plan)

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AMNB$?
2. Antoine : « J'ai marché autant de temps sur le chemin que dans le champ »
   Bernard : « Moi aussi »
   Si la réponse de Bernard est évidente, la nature du point R l'est beaucoup moins. Quelle est la nature de R pour le triangle ABC ?
3. Sur le plan, on lit $AB = 9cm$, $AC = 15cm$ et $BC = 13cm$. Représenter cette carte et matérialiser le parcours d'Antoine et Bernard en construisant le triangle ABC et les points M, N et R.



Nombres et tableur

Les premiers entiers naturels non nuls ont été rangés dans une feuille de tableur comme indiqué sur l'image ci-dessous.

◇	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	6	10	15	21	28
2	2	5	9	14	20	27	35
3	4	8	13	19	26	34	43
4	7	12	18	25	33	42	52
5	11	17	24	32	41	51	62
6	16	23	31	40	50	61	73
7	22	30	39	49	60	72	85
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Le naturel qui se trouve dans la cellule du tableur à l'intersection de la colonne i et de la ligne j sera noté $C(i, j)$; ainsi, sur le dessin ci-dessus, on a $C(3, 4) = 18$

1. (a) Donner $C(1, 9)$, $C(1, 10)$, $C(1, 13)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(1, j + 1)$ et $C(1, j)$?
   (b) Donner $C(9, 1)$, $C(10, 1)$, $C(13, 1)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(i + 1, 1)$ et $C(i, 1)$?
2. On veut obtenir une feuille de tableur remplie comme ci-dessus (mais en allant aussi loin que le permet le tableur). Comment, à l'aide de formules « recopiées vers le bas » ou « recopiées vers la droite » (ou les deux) peut-on obtenir cela ?
3. (a) Justifier les relations de la question 1 entre $C(1, j + 1)$ et $C(1, j)$, d'une part, et $C(i + 1, 1)$ et $C(i, 1)$, d'autre part.
   (b) Donner une expression de $C(1, j)$ en fonction de j puis une expression de $C(i, j)$ en fonction de i et j.
   On pourra utiliser le résultat suivant : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
4. Déterminer i et j sachant que $C(i, j) = 2008$