session 2009

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 11 MARS 2009

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les candidats de la série S traiteront les exercices 1, 2, 3 et *«l'exercice 4 Série S»*,
les candidats des autres séries traiteront les exercices 1, 2, 3 et *«l'Exercice 4 Autres séries»*
L'usage de la calculatrice est autorisé

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

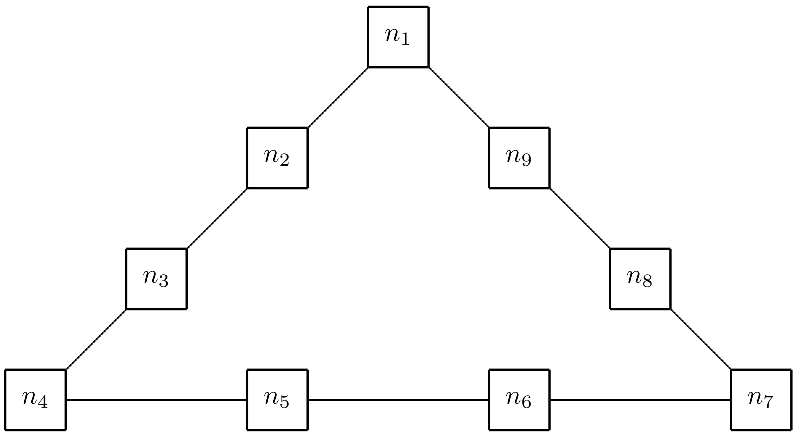
Partie A : Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

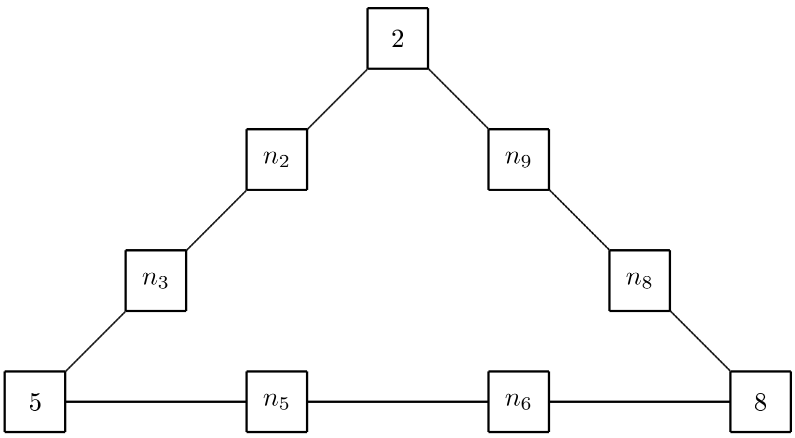


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   (a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$
   (b) En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
   (c) Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5. (a) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   (b) Proposer un triangle 19 magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur L = 16 et de largeur l = 8.
   On pourra noter c la longueur du côté du losange.
   Les questions suivantes sont indépendantes.
2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.
3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
   Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
4. À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
   Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.
5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3 : Itération

On considère une séquence composée des lettres X, Y, Z que l'on suppose, pour simplifier, rangées dans l'ordre alphabétique ; par exemple la séquence XYXZY s'écrira XXYYZ.

A chaque étape, on choisit d'ajouter à la séquence une des trois lettres X, Y ou Z et d'enlever les deux autres selon le schéma suivant :

Si on ajoute un X, on enlève un Y et un Z (si bien sûr Y et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;
Si on ajoute un Y, on enlève un X et un Z (si X et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;
Si on ajoute un Z, on enlève un X et un Y (si X et Y sont présents, sinon on s'arrête) ;
Par exemple, partant de la séquence XXYYZ.

- si on ajoute X, on enlève un Y et un Z, on obtient alors XXXY ;
- si on ajoute Y, on obtient XYYY ;
- si on ajoute Z, on obtient XYZZ.

Et, partant de la séquence XYY, on ne peut ajouter que Z et on obtient alors : YZ.

On réitère le processus autant que possible.

1. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence XYZZ ?
2. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence XYYZZZ ?
3. On part d'une séquence composée de 6 lettres. Lorsque il est possible d'arriver à une séquence d'une seule lettre, quel est le nombre d'étapes nécessaires ?
4. On part de la séquence composée de dix X, onze Y et douze Z. Quelle(s) lettre(s) obtient-on dans les issues formées d'une seule lettre ?
5. Trouver une séquence de dix lettres aboutissant à la seule lettre X.

Exercice 4 Série S : Cercles inscrits

On considère un triangle ABC rectangle en A. On note

$$a = BC,\ b = CA,\ c = AB$$

On appelle $\mathcal{C}$ le cercle inscrit dans le triangle ABC ; on rappelle que le centre du cercle inscrit d'un triangle est le point d'intersection des bissectrices. On appelle r le rayon de ce cercle.

1. Démontrer que
$$r = \frac{1}{2}(b + c - a)$$
2. PQR est un triangle rectangle en P. H est le pied de la hauteur de PQR issue de P. On appelle $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les cercles inscrits dans les triangles PQH, PQR et PRH. r_1 est le rayon de $\mathcal{C}_1$, r_2 celui de $\mathcal{C}_2$ et r_3 celui de $\mathcal{C}_3$. Démontrer que $PH = r_1 + r_2 + r_3$.
3. Dans un triangle DEF, l 'orthocentre est K et le pied de la hauteur issue de E est E'. Les cercles inscrits dans les triangles $DE'K$ et $FE'K$ ont même rayon. Que peut on dire du triangle DEF ?

Exercice 4 Autres séries : Tablette de chocolat

Une tablette de chocolat rectangulaire, dont les bords sont lisses est constituée de a barres comportant chacune b carreaux.

Dans un premier temps, on prendra $a = 8$ et $b = 4$.

On veut séparer tous les carreaux de la tablette et on s'intéresse au nombres de cassures à réaliser. Les cassures sont rectilignes et laissent des bords irréguliers.

Partie A

1. On sépare les huit barres, puis les quatre carreaux de chaque barre.
   Combien de cassures a-t-on faites ?
2. On sépare quatre rangées de huit carreaux, puis les huit carreaux de chaque rangée.
   Combien de cassures a-t-on faites ?
3. On suppose maintenant que la tablette possède a barres de b carreaux.
   On sépare les a barres, puis les b carreaux de chaque barre.
   Combien de cassures a-t-on faites ?
4. On sépare b rangées de a carreaux, puis les a carreaux de chaque rangée.
   Combien de cassures a-t-on faites ?
5. On commence par casser la tablette en deux tablettes, l'une avec c barres de b carreaux et l'autre avec $a - c$ barres de b carreaux, puis on utilise la technique de la question 3) pour chacune des deux tablettes.
   Combien de cassures a-t-on faites ?

Partie B

Tous les carreaux d'une tablette $a \times b$ ont été séparés. On supposera dans cette question que $3 \leq a < b$. Le tiers des carreaux n'a aucun bord lisse.

1. Trouver une relation entre a et b
2. Pour quelles valeurs de b, a-t-on $a \geq 4$?
3. En déduire a et b.