session 2010

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 10 MARS 2010

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

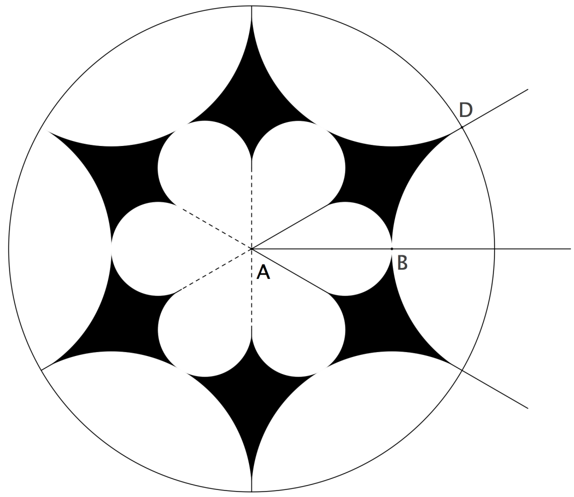
Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

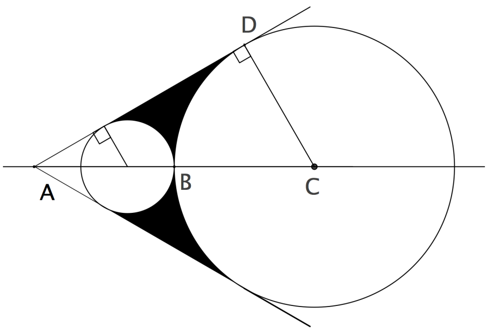
Exercice 1 : la Rosace. Sujet national

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
2. (a) Montrer que $AB = BC$.
   (b) Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
   (c) D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2 : A la recherche du « chaînonze ». Sujet national

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« *Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11* ».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle *chaînonze* une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.

Par exemple « 7 5 9 4 » est un *chaînonze* car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter à droite de la chaîne « 7 5 9 4 »pour la prolonger en un *chaînonze* ?

2. Prolonger par la droite le *chaînonze* « 7 5 9 4 » en un *chaînonze* de 12 chiffres.

   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^e chiffre ?

   On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un *chaînonze* le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 »et « 9 1 ». Que constatez-vous ?

   On appelle *chaînonze fini* un *chaînonze* qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.

   On appelle *chaîneonze* n-périodique un *chaîneonze* infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un *chaîneonze* de trois chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   (a) Etudier le cas particulier « a a ».

   (b) Etudier le cas $b = a - 1$.

   (c) Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le *chaîneonze* obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice 3 : Algorithme et fractions égyptiennes. Sujet académique

Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs. Il existe un unique couple (q, r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q s'appelle le quotient de a par b ; on le note $E\left(\frac{a}{b}\right)$.
r s'appelle le reste de la division de a par b ; on le note $mod(a, b)$.

On appelle fraction égyptienne une fraction de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in N^*$. Le but de ce problème est de prouver que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 se décompose en la somme de fractions égyptiennes dont les dénominateurs sont tous distincts, et de trouver une telle décomposition.

1. Vérifier que
$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

2. (a) Quelle est la plus grande fraction égyptienne $\frac{1}{n}$ plus petite que $\frac{4}{5}$?

   (b) Démontrer que $n = E\left(\frac{5}{4}\right) + 1$.

   (c) Quelle est la plus grande fraction égyptienne $\frac{1}{m}$ plus petite que $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$?

   (d) Retrouver alors la décomposition de la première question.

3. On suppose que $1 < x < y$ et que $\frac{x}{y}$ est une fraction irréductible. Démontrer que
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1} + \frac{x - mod(y, x)}{y \times \left(E\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)} \qquad \text{(F)}$$

4. (a) En utilisant la formule précédente, décomposer $\frac{2}{3}$ en somme de deux fractions égyptiennes.

   (b) Décomposer $\frac{5}{7}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

5. (a) Démontrer que la formule (F) permet de décomposer toute fraction $\frac{x}{y}$ avec $1 < x < y$ et $x \in N, y \in N*$ en somme de fractions égyptiennes.

   (b) Démontrer que toutes les fractions égyptiennes ainsi trouvées sont distinctes.

Exercice 4 : La montre. Sujet académique

Julie passe cet après-midi l'épreuve des Olympiades !

Un peu nerveuse avant l'épreuve, elle regarde fréquemment sa montre à aiguilles de même longueur, mais de couleurs différentes... La tension monte, il est exactement 1h30min0s.

1. Pour se détendre, elle calcule une mesure de l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes. Quel résultat exact peut elle avoir trouvé ?
2. Toujours aussi nerveuse, elle se repose la même question à 1h40min0s : quel est alors l'angle entre les deux aiguilles ?
3. Lorsque l'aiguille des heures tourne de un degré de combien de degrés tourne l'aiguille des minutes ?
4. Au début de l'épreuve, elle pose sa montre sur la table, il est exactement 2h0min0s. Un des exercices, justement un problème de montre, est facile et elle le termine en moins d'une heure. A ce moment Julie constate que l'aiguille supérieure, censée indiquer les secondes, est complètement sortie de l'axe et dessine avec les autres un triangle équilatéral comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

   Quel est le nombre entier, par défaut, de secondes que l'aiguille défaillante aurait dû indiquer ?