session 2011

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 23 MARS 2011

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : Essuie-glace. Sujet national

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brise sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment $[OB]$. Soit A le point de $[OB]$ tel que $OA = 15$ cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment $[AB]$ (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

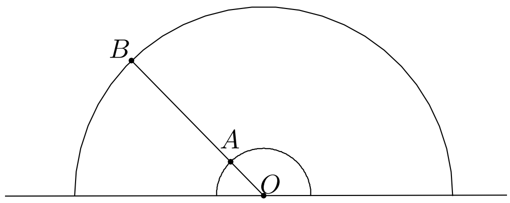

Figure 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments $[OB]$ et $[O'B']$ de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

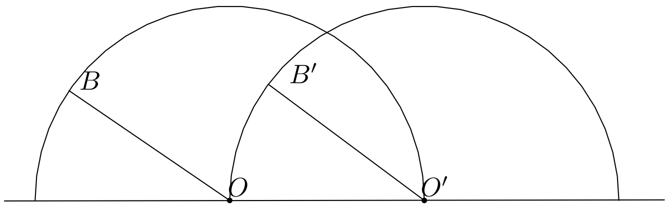

Figure 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment $[OC]$ qui relie le centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4 \times CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.
   (a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
   (b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que $[MN]$ est horizontal (voir la figure 4 page suivante). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment $[OM']$ est horizontal.

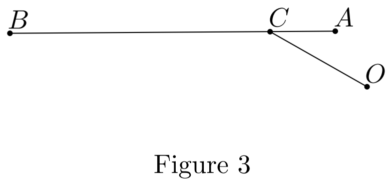

Figure 3

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

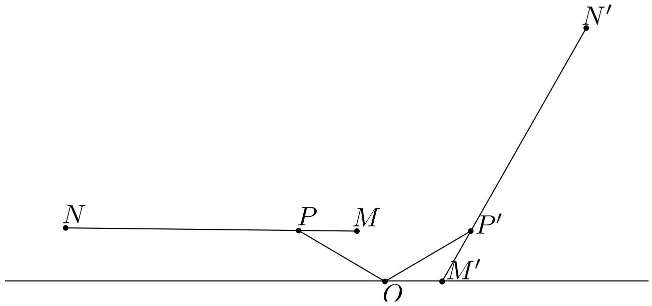

Figure 4

Exercice 2 : Le singe sauteur. Sujet national

J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit **atteignable** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ..., n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\,;n]$.

Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.

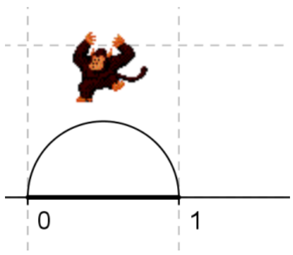

Figure 1

Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\,;\,2]$.

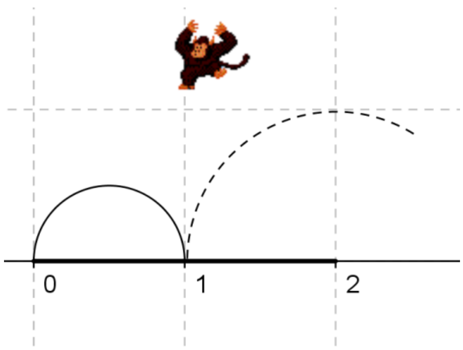

Figure 2

Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\,;\,3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.

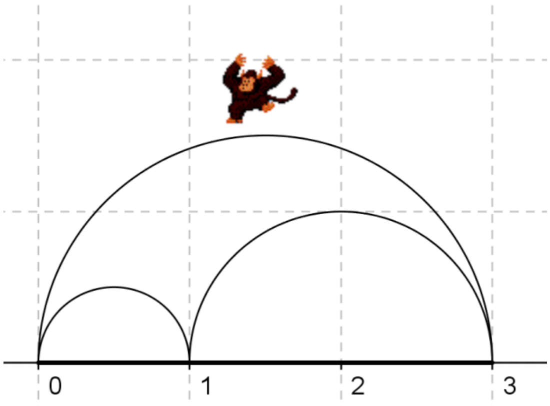

Figure 3

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

   On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; ce résultat est admis.
3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

   Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. (a) Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

   (b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3. . .

   Montrer que $N + 4$ est aussi atteignable.

Exercice 3 : Carrés et cubes. Sujet académique

Un, deux, trois ou quatre côtés d'un carré de côté n (n entier naturel supérieur ou égal à deux) sont peints en rouge. On découpe ce carré en n^2 petits carrés de côté 1.

1. Dans cette question, $n = 5$. Pour chaque façon, que l'on précisera, de peindre les côtés du carré, déterminer le nombre de petits carrés ayant au moins un côté rouge.
2. Julie a obtenu 28 petits carrés ayant au moins un côté rouge. Que peut valoir n ?

On peint maintenant en rouge, une, deux, trois, quatre, cinq, ou six faces d'un cube dont l'arête mesure n .

On coupe ce cube en n^3 petits cubes d'arête 1.

3. Dans cette question, $n = 5$. Pour chaque façon, que l'on précisera, de peindre les faces du cube, déterminer le nombre de petits cubes ayant au moins une face rouge ?
4. Exprimer en fonction de n, pour chaque façon de peindre le cube, le nombre de petits cubes ayant au moins une face peinte.
5. En peignant les six faces du cube, Julie a trouvé 728 petits cubes ayant au moins une face peinte. Existe-t-il une autre configuration (une, deux, trois, quatre ou cinq faces peintes) donnant également 728 petits cubes ayant au moins une face peinte ?

Exercice 4 : Le café de Julie. Sujet académique

Julie aime le café et se sert toujours une tasse de 200 mL. Hier, elle a bu son café de la manière suivante : elle a bu la moitié de son café, puis le tiers de ce qu'il restait, puis le quart de ce qu'il restait, et ainsi de suite jusqu'à boire le centième de ce qu'il restait. Aujourd'hui, le café est très chaud. Julie boit le centième du café, puis le quatre-vingt-dix-neuvième de ce qu'il reste, et ainsi de suite jusqu'à boire la moitié de ce qu'il reste.

1. Montrer qu'aujourd'hui, Julie a bu 198 mL de café.
2. Déterminer la quantité de café qui restait dans la tasse hier, et démontrer que $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{99\times100}=\frac{99}{100}$.
3. Au lieu de boire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,$\ldots$,$\frac{1}{100}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{2^k}$, $\frac{1}{3^k}$,$\ldots$,$\frac{1}{100^k}$ de son café, où k est un nombre entier naturel, non nul. Quelle quantité de café a-t-elle bue si $k=2$?
4. Au lieu de boire $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{99}$,$\ldots$,$\frac{1}{2}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{100^k}$, $\frac{1}{99^k}$,$\ldots$,$\frac{1}{2^k}$ de son café. Quelle quantité de café a-t-elle bue si $k=2$?
5. Pour k quelconque, a-t-elle bu plus, moins ou autant de café si elle commence par boire $\frac{1}{2^k}$ ou $\frac{1}{100^k}$ de son café ?