session 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

MERCREDI 21 MARS 2012

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Dans ces quatre exercices, toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte même s'ils ne conduisent pas à une solution. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : nombres *digisibles*. Sujet national

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

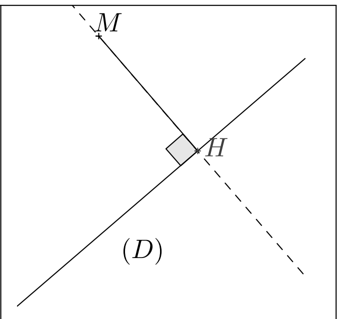
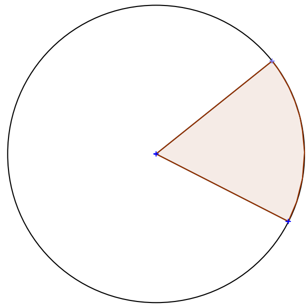
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   (a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   (b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   (c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   (d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
   (a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   (b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   (c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

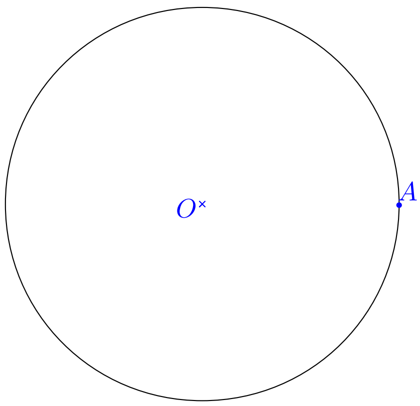
Exercice 2 : cibles. Sujet national

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point*** M ***et une droite*** (D) *la distance* MH*, où* H *est le point d'intersection de* (D) *avec la droite perpendiculaire à* (D) *passant par* M*.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est* R*, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$*.* *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point* M *à* ***un segment*** $[BC]$ *comme étant la distance du point* M *à la droite* (BC)*.*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



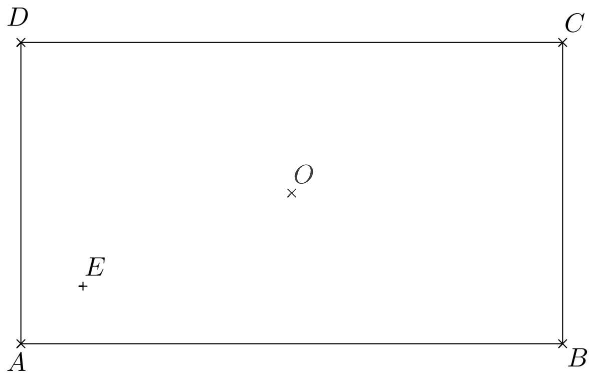
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = 20$ cm et de largeur $BC = 12$ cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

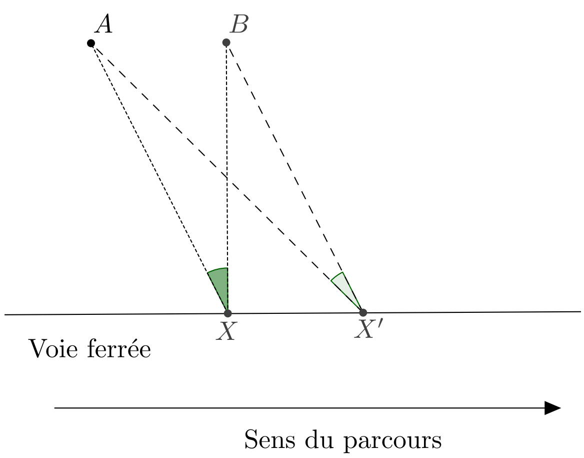


1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$?
2. (a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
   (b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.
   (c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[AB]$ que des trois autres côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice 3 : les éoliennes. Sujet académique

Xavier voyage dans un train en compagnie de ses deux amies Yasmina et Zoé. La voie ferrée est rectiligne et le train circule à une vitesse constante de 90 km/h.

1. Combien de secondes le train met-il pour parcourir 100 m ?
2. D'un côté de la voie, à une distance de 200m de celle-ci, se trouvent deux éoliennes A et B distantes l'une de l'autre de 100m (A se trouve avant B dans le sens du parcours). Lorsque Xavier se trouve exactement à 200 m de l'éolienne B, c'est à dire lorsque l'angle $\widehat{ABX}$ est droit, il mesure l'angle $\widehat{AXB}$. 4 secondes plus tard, il se trouve dans une position X' et mesure à nouveau l'angle $\widehat{AX'B}$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Montrer que la somme des mesures des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AX'B}$ vaut 45°.

3. Sa camarade, Yasmina, a observé avant lui ces deux éoliennes. Toutes les 4 secondes, elle a mesuré l'angle $\widehat{AYB}$, Y étant sa position sur la voie ferrée. Elle a commencé ses mesures 8 secondes avant la première mesure de Xavier et a terminé en même temps que Xavier.
   (a) Faire une figure.
   (b) Calculer la somme des mesures de tous les angles que Yasmina a mesurés.
4. Zoé a effectué ses mesures bien longtemps en avance : elle a commencé 10 minutes avant la première mesure de Xavier et a renouvelé toutes les 4 secondes la mesure de l'angle $\widehat{AZ_0B}$, $\widehat{AZ_1B}$, ... Z_0, Z_1, ... étant les positions de Zoé sur la voie ferrée. Elle a continué ses calculs longtemps après que Xavier s'est arrêté. Démontrer que la somme des mesures de tous les angles qu'elle a mesurés est inférieure à 180°.

Exercice 4 : duels tétraédriques. Sujet académique

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.
Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   (a) Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
   (b) Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   (a) Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
   (b) Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?
4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées a_1, a_2, a_3, a_4 avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées b_1, b_2, b_3, b_4 avec $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées c_1, c_2, c_3, c_4 avec $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, celui de Diane a des faces numérotées d_1, d_2, d_3, d_4 avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$,

   Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraédrique ne se retrouve sur un autre dé tétraédrique. Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.
   (a) Montrer que, si $a_2 \leq b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.
   (b) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?
   (c) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$?